

В.С.Шипачев

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**

ВЫСШАЯ ШКОЛА

В.С.Шипачев

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**



Москва
«Высшая школа»
1999

УДК 517
ББК 22.16
Ш 63

*Рекомендовано
для использования в учебном процессе*

Шпаачев В. С.

**Ш 63 Математический анализ: Учеб. пособие для вузов. — М.:
Высшая школа, 1999. — 176 с.:**

ISBN 5-06-003510-7

Книга представляет собой учебное пособие по математическому анализу. В ней рассмотрены важнейшие понятия математического анализа, такие как: 1) функции, пределы и непрерывность функций, их графики; 2) производные и их применения; интегралы и их приложения.

Пособие предназначено для студентов очных и заочных отделений высших учебных заведений. Может быть полезно студентам техникумов и колледжей, учащимся школ, лицеев и гимназий.

Учебное издание

Шпаачев Виктор Семенович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Редактор *Ж. И. Яковлева*

Художественный редактор *Ю. Э. Иванова*

Технический редактор *Л. А. Овчинникова*

Корректор *В. Н. Жилкина*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-190. Сдано в набор и подп. в печать 08.12.98.
Формат 60x88 ¹/₁₆. Бум. газетн. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Объем
10,78 усл. печ. л. 11,03 усл. кр.-отт. 8,61 уч.-изд. л. Тираж 10 000. Заказ № 233

Издательство «Высшая школа». 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул. д. 29/14.

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., д. 7.

ISBN 5-06-003510-7

© Издательство «Высшая школа», 1999

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие представляет собой обобщение многолетнего опыта преподавания автором математического анализа на нематематических факультетах и на Всероссийских курсах повышения научной квалификации учителей средних школ в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

В процессе преподавания было выяснено, какие разделы математического анализа вызывают существенные затруднения как у учащихся средней школы, так и студентов, начинающих его изучение. Именно на эти разделы было обращено основное внимание.

При написании пособия автор ставил перед собой три задачи: 1) дать точный смысл основных понятий математического анализа; 2) познакомить читателя с методами решения основных типов задач, встречающихся в курсе математического анализа; 3) изложить материал так, чтобы он был доступен не только студенту, но и ученику старшего класса средней школы, желающему серьезно изучать математику.

В пособии изложен практический материал по основным разделам математического анализа: дифференцированию и интегрированию. Приводятся основные теоретические сведения и формулы без доказательств, необходимые для решения задач. Формулировки определений и теорем даются по книге автора «Высшая математика», являющейся учебником для вузов. Разумеется, основная работа над теоретическим материалом (доказательства теорем и формул) ведется по учебнику или конспектам лекций, однако для решения задач достаточно понимания соответствующих теорем или формул.

В пособии имеется большое количество подробно решенных типовых примеров и задач как вычислительного характера, так и способствующих более глубокому пониманию теории. Для самостоятельной работы приведены примеры и задачи в виде упражнений, для решения которых требуется непосредственное применение изложенного материала. Даны контрольные задачи для повторения и углубления материала соответствующей главы с ответами и решениями. Эти задачи весьма полезны студентам для самостоятельной работы. При подборе примеров и задач были использованы различные источники, в том числе книга автора «Задачник по высшей математике».

К каждому параграфу сформулированы «Вопросы для самопроверки». Цель этих вопросов — помочь проконтролировать усвоение изучаемого материала.

Пособие начинается с изложения тех разделов школьной программы, которые особенно важны при изучении математического анализа. Материал изложен доходчивым языком с постоянным нарастанием строгости изложения, что дает возможность студенту активно включиться в повторение элементарной математики и успешно перейти к изучению математического анализа.

Естественно, что ограниченность учебного времени, уровень математической подготовки поступающих на математические факультеты вынудили автора уменьшить объем включаемого в пособие материала, сделать изложение максимально доступным и привести большое количество подробно решенных примеров и задач.

Хотя пособие предназначено для студентов вузов, автор полагает, что оно привлечет внимание широкого круга читателей, желающих ознакомиться с основными идеями и методами математического анализа.

Автор

Глава 1. Введение в математический анализ

§ 1. Понятия множества и подмножества

В математике все понятия делятся на первичные и определяемые через первичные¹⁾ или уже известные.

Основным первичным понятием математики, ее фундаментом является понятие множества. Слова: *совокупность, семейство, система, набор, объединение, коллекция* и т. п. являются синонимами слова *множество*. Примерами множеств служат множество учащихся в данной аудитории; совокупность тех из них, кто получает по математике только хорошие и отличные оценки; множество страниц данной книги; семейство Звезд Большой Медведицы; коллекция картин Третьяковской галереи; множество всех натуральных чисел; множество всех целых чисел; множество, состоящее из одного числа нуль, и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное число объектов произвольной природы.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или *точками*. Множества чаще всего обозначают большими буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми буквами. Если x_1, \dots, x_n — некоторые элементы, то запись $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов x_1, \dots, x_n .

Если x — элемент множества X , то пишут: $x \in X$ (x принадлежит X). Если x не является элементом множества X , то пишут: $x \notin X$ (x не принадлежит X).

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они совпадают, а пишут $X = Y$.

Например, множество студентов всех факультетов института X и множество всех студентов того же института Y совпадают: $X = Y$; или, если X — множество, состоящее из двух чисел 2 и 3, а Y — множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, то $X = Y$.

Если в X нет элементов, не принадлежащих Y , то говорят, что X содержится в Y или что X — *подмножество* множества Y . В этом случае пишут: $X \subset Y$ (X содержится в Y).

¹⁾ Следует особо подчеркнуть, что первичные понятия не могут быть определены. Они, как правило, разъясняются на примерах.

Например, множество четных чисел X — подмножество множества Y целых чисел: $X \subset Y$; или множество рациональных чисел Q — подмножество множества \mathbf{R} всех вещественных чисел: $Q \subset \mathbf{R}$; или множество $X = \{1, 2, 3\}$ есть подмножество множества $Y = \{1, 2, 3, 4\}$: $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Если же множество X состоит из чисел 1, 2 и 3: $X = \{1, 2, 3\}$, а множество Y — из чисел 2, 3 и 4: $Y = \{2, 3, 4\}$, то не имеет места ни соотношение $X \subset Y$, ни соотношение $Y \subset X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset . Например, множество чисел, удовлетворяющих системе двух неравенств: $x < 3$ и $x > 4$ пусто. Так, множество $\{x > 7 \text{ и } x < 3\} = \emptyset$. Из определения подмножества следует, что пустое множество является подмножеством любого множества, т. е., каково бы ни было множество Y , имеет место соотношение $\emptyset \subset Y$.

◆ **Пример.** Дано $X = \{1, 2, 3\}$. Выпишем, все подмножества множества X .

Решение. Сначала выпишем подмножества, состоящие из одного элемента: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Затем выпишем подмножества, состоящие из двух элементов $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, наконец, само множество $\{1, 2, 3\}$ и пустое подмножество \emptyset . Таким образом, множество всех подмножеств данного множества X содержит восемь элементов: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$.

Множество с установленным порядком расположения элементов называют *упорядоченным*. Упорядоченное множество, в отличие от просто множества, записывают внутри круглых скобок. Например, из одного и того же множества $\{x_1, x_2\}$ можно получить два упорядоченных множества: $(x_1; x_2)$ и $(x_2; x_1)$.

В заключение отметим, что *первичными понятиями являются точка, прямая и плоскость*. Для всех остальных понятий даются определения.

Вопросы для самопроверки

1. Какую роль в математике играют первичные понятия?
2. Назовите основное первичное понятие.
3. Приведите примеры различных множеств.
4. Приведите пример совпадающих множеств.
5. Дайте определение подмножества.
6. Почему пустое множество является подмножеством любого множества?
7. Что называется упорядоченным множеством? Приведите пример.

§ 2. Наиболее употребительные числовые множества

Пусть a и b — два числа, причем $a < b$,

Определение 1. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется отрезком (или сегментом) и обозначается $[a, b]$.

Определение 2. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, или $a < x < +\infty$, или $-\infty < x < b$, или $-\infty < x < +\infty$ называется интервалом и обозначается (a, b) , или $(a, +\infty)$, или $(-\infty, b)$, или $(-\infty, +\infty)$ соответственно.

Определение 3. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$, или $a < x \leq b$, или $a \leq x < +\infty$, или $-\infty < x \leq b$, называется полуинтервалом и обозначается $[a, b)$, или $(a, b]$, или $[a, +\infty)$, или $(-\infty, b]$ соответственно.

Все эти множества называются промежутками.

Промежутки $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и (a, b) называются конечными; a и b — их концы. Остальные промежутки называются бесконечными.

Интервал (a, b) отличается от отрезка $[a, b]$ лишь тем, что ему не принадлежат числа a и b . Это отличие играет существенную роль во многих вопросах математического анализа. Кроме того, интервал (a, b) не содержит ни наибольшего, ни наименьшего числа, в то время как в отрезке $[a, b]$ такими числами являются соответственно b и a .

Вопросы для самопроверки

1. Какие числовые множества называют промежутками?
2. Из отрезка $[a, b]$ удален интервал (a, b) . Что осталось?
3. Из отрезка $[1, 8]$ удален интервал $(3, 5)$. Что осталось? Запишите множество оставшихся чисел с помощью промежутков.

§ 3. Абсолютная величина числа

Понятия абсолютной величины числа и неравенства, связанные с абсолютными величинами, широко используются в математике.

Определение. Абсолютной величиной (или модулем) числа x называется само число x , если $x \geq 0$, или число $-x$, если $x < 0$.

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|+5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$.

Из определения вытекает ряд свойств абсолютной величины числа.

1°. $|x| \geq 0$.

Действительно: 1) если $x \geq 0$, то $|x| = x \geq 0$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$; но $-x > 0$, так как $x < 0$, т. е. $|x| > 0$.

Из 1) и 2) получаем, что $|x| \geq 0$.

2°. $|x| = |-x|$.

В самом деле: 1) если $x \geq 0$, то $-x \leq 0$, тогда $|-x| = -(-x) = x = |x|$, так как $x \geq 0$;

2) если $x < 0$, то $-x > 0$, тогда $|-x| = -x = |x|$, так как $x < 0$.

Из 1) и 2) получаем, что $|x| = |-x|$.

3°. $-|x| \leq x \leq |x|$.

Действительно: 1) если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $-x \leq 0$, тогда $-x \leq 0 \leq x = |x|$, откуда $-x \leq |x|$ или $-|x| \leq x$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $-x > 0$, тогда $x < 0 < -x = |x|$, тогда $x < |x|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|x| \leq x \leq |x|$.

Следующие три свойства докажем в виде теорем.

Теорема 1.1. Пусть ε — положительное число. Тогда неравенства $|x| \leq \varepsilon$ и $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ равносильны.

Доказательство. Пусть $|x| \leq \varepsilon$. Тогда:

1) если $x \geq 0$, то $|x| = x \leq \varepsilon$, откуда $0 \leq x \leq \varepsilon$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x \leq \varepsilon$, откуда $-\varepsilon \leq x \leq 0$.

Объединяя 1) и 2), при любом x получаем $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

Пусть справедливы неравенства $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Это значит, что одновременно выполняются неравенства $x \leq \varepsilon$ и $x \geq -\varepsilon$. Из последнего имеем $-x \leq \varepsilon$. Так как, по определению, $|x|$ есть либо x , либо $-x$, $|x| \leq \varepsilon$.

Теорема 1.2. Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. Пусть x и y — любые числа. Согласно свойству 3°, для них справедливы неравенства

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{и} \quad -|y| \leq y \leq |y|,$$

складывая которые почленно, получаем

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|).$$

По теореме 1.1. это двойное неравенство равносильно неравенству

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

Заметим, что $|x-y| \leq |x|+|y|$. Действительно, $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+| -y| \leq |x|+|y|$ (проверьте это самостоятельно).

Теорема 1.3. Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x-y| \geq |x|-|y|$.

Доказательство. Для любых чисел x и y имеем

$$x = y + (x - y).$$

По теореме 1.2 справедливо неравенство

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|,$$

откуда получаем $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Заметим, что $|x+y| \geq |x|-|y|$. Действительно, $|x+y| = |x-(-y)| \geq |x|-| -y| = |x|-|y|$ (проверьте это самостоятельно).

И в заключение отметим, что, каковы бы ни были два числа x и y , имеют место соотношения

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{и} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{если } y \neq 0,$$

которые легко проверить, рассмотрев случаи, когда x и y — числа одного знака (оба положительны или оба отрицательны) и когда они имеют разные знаки. Например, проверим $|xy| = |x||y|$ в случае, когда $x > 0$, $y < 0$.

Имеем $|x| = x$, $|y| = -y$ и $xy < 0$; следовательно,

$$|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|.$$

♦ **Пример 1.** Найти решения следующих уравнений:

$$1) |x| = x + 2; \quad 2) |x| = x - 2; \quad 3) x + 2|x| = 3; \quad 4) x^2 + 3|x| - 4 = 0.$$

Решение. 1) При $x \geq 0$ имеем $x = x + 2$, откуда $0 = 2$ — неверное равенство. Следовательно, решений нет. При $x < 0$ получаем $-x = x + 2$, откуда $x = -1$. Это есть решение уравнения.

2) При $x \geq 0$ имеем $x = x - 2$, откуда $0 = -2$ — неверное равенство. Следовательно, решений нет. При $x < 0$ получаем $-x = x - 2$, откуда

$x = 1 > 0$, что противоречит сделанному предположению $x < 0$. Таким образом, уравнение не имеет решений.

3) При $x \geq 0$ имеем $x + 2x = 3$, откуда $x_1 = 1$. При $x < 0$ получаем $x - 2x = 3$, откуда $x_2 = -3$. Следовательно, $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$ — решения уравнения.

4) Воспользуемся тем, что $|x|^2 = x^2$.¹⁾ Тогда $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$. Заменяя $|x|$ на y , получим $y^2 + 3y - 4 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -4$. Так как $y = |x| \geq 0$, то $y_2 = -4$ не подходит. Остается $y_1 = |x| = 1$, а это равносильно $x = -1$ и $x = 1$. Можно решить уравнение и стандартным способом, рассмотрев случаи $x \geq 0$ и $x < 0$. (Сделайте это самостоятельно.)

◆ **Пример 2.** Доказать, что $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Решение. Так как, по определению $||x| - |y||$ есть либо $|x| - |y|$, либо $-(|x| - |y|) = |y| - |x|$, то для доказательства данного неравенства надо показать, что: 1) $|x| - |y| \leq |x - y|$ и 2) $|y| - |x| \leq |x - y|$. Но неравенство 1) доказано в теореме 1.3, а неравенство 2) также следует из этой теоремы и свойства 2°:

$$|x - y| = |-(x - y)| = |y - x| \geq |y| - |x|.$$

● **Упражнения.** Решите уравнения и неравенства:

1. $|x| = -x$. (Отв. $x \leq 0$.)
2. $|x| > x$. (Отв. $x < 0$.)
3. $|x - 2| < 3$. (Отв. $-1 < x < 5$.)
4. $|x - 1| \geq 2$. (Отв. $x \geq 3$ и $x \leq -1$.)
5. $|x| = x + 1$. (Отв. $x = -1/2$.)
6. $|x| < x + 1$. (Отв. $x > -1/2$.)
7. $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$. (Отв. $-1 < x < 0$.)
8. $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$. (Отв. $x < -1$ или $x \geq 1$.)
9. $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$. (Отв. $2 < x < 3$.)
10. $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$. (Отв. $2 < x < 3$.)

¹⁾ Действительно, положив $x = y$ в соотношении $|xy| = |x||y|$, получим $|x|^2 = |x^2| = x^2$, так как $x^2 \geq 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется абсолютной величиной числа?
2. Что больше: $|2-3|$ или $|2|+|-3|$?
3. Верно ли, что $|x^3| \neq |x|^3$, если $x < 0$?
4. Докажите, что $|x^2| = |x|^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Запишите без знака модуля выражения: $|x-y|$, если $x < y$; $|x-y|$, если $x > y$; $|-x|$, если $x < 0$.
6. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x|}{x}$?

§ 4. Метод математической индукции

Метод математической индукции относится к самым важным методам математических доказательств. Он применяется для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n . Сформулируем его в общем виде: чтобы доказать некоторое утверждение, зависящее от натурального числа n (например, какую-нибудь формулу), надо: 1) проверить его справедливость при $n=1$ ¹⁾; 2) предполагая справедливость утверждения для некоторого n ($n > 1$), доказать его справедливость для $n+1$. Затем делается вывод о справедливости данного утверждения для любого натурального числа n .

◆ **Пример 1.** Доказать методом математической индукции, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. 1) Проверяем верность данной формулы при $n=1$. Левая часть равна 1. Правая часть $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1$. Значит, формула верна при $n=1$.

2) Предполагая, что данная формула верна для некоторого n ($n > 1$), докажем, что при $n+1$ имеет место такая же формула:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

¹⁾ Если при $n=1$ утверждение не имеет смысла, то проверку справедливости утверждения надо делать для наименьшего значения n , при котором утверждение имеет смысл.

Действительно,

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции делаем вывод, что данная формула верна для любого натурального числа n .

Метод математической индукции удобен для нахождения сумм конечного числа слагаемых.

◆ **Пример 2.** Найти сумму

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

Решение. Обозначим эту сумму через S_n , т. е.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

Чтобы получить для S_n выражение, не требующее алгебраического сложения n слагаемых, вычислим несколько первых значений этой суммы:

$$S_1 = 1; S_2 = 1 + 3 = 4; S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Видим, что это последовательные квадраты натуральных чисел. Естественно предположить, что $S_n = n^2$. Чтобы доказать справедливость этого равенства, воспользуемся методом математической индукции. Имеем: 1) $S_1 = 1^2 = 1$. Значит, формула верна при $n = 1$; 2) предполагая, что она верна для некоторого n , докажем, что при $n + 1$ имеет место формула $S_{n+1} = (n+1)^2$. Действительно,

$$S_{n+1} = S_n + [2(n+1) - 1] = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции делаем вывод, что формула $S_n = n^2$ верна для любого натурального числа n и

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

● **Упражнения.**

1. Найдите сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

(Отв. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$. У к а з а н и е. Замените каж-

дое слагаемое на разность по формуле $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ или примените индукцию.)

2. Методом математической индукции докажите, что $2^n > n^2$ для $n > 4$.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит метод математической индукции?
2. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n справедлива формула

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 5. Факториал

Для вычисления суммы первых n натуральных чисел имеется удобная формула

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых n натуральных чисел такой формулы нет, но зато это часто встречающаяся в комбинаторике и в других разделах математики величина имеет специальное обозначение: $n!$ (эн факториал). Итак, по определению,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений n число $n!$ очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет $n!$ с ростом n , выпишем эти числа для n от 1 до 10: $1! = 1^1)$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 3! \cdot 4 = 24$, $5! = 4! \cdot 5 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$.

Из определения $n!$ следует, что факториалы двух соседних натуральных чисел n и $n+1$ связаны формулой

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1). \quad (1)$$

¹⁾ По определению полагают $1! = 1$.

Заметим, что если в это равенство подставить $n=0$, то получим $1! = 0! \cdot 1$, поэтому полагают

$$0! = 1;$$

это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

◆ **Пример 1.** Доказать формулу $(n+1)! - n! = n! \cdot n$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Имеем: 1) при $n=1$ $(1+1)! - 1! = 2! - 1! = 2 - 1 = 1$, откуда $1 = 1$, значит, формула верна; 2) предполагая ее верность для некоторого n , докажем, что при $n+1$ имеет место формула $(n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n+1)$. Действительно, по формуле (1) получаем

$$\begin{aligned} (n+2)! - (n+1)! &= n!(n+1)(n+2) - n!(n+1) = \\ &= n!(n+1)[(n+2) - 1] = n!(n+1)(n+1) = (n+1)!(n+1), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на основании метода математической индукции заключаем, что формула верна для любого натурального числа n .

◆ **Пример 2.** Найти сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$

Решение. Заменяем каждое слагаемое разностью по формуле $(n+1)! - n! = n! \cdot n$ (см. пример 1), получаем

$$\begin{aligned} (1+1)! - 1! + (2+1)! - 2! + (3+1)! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = \\ = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1, \end{aligned}$$

так как все слагаемые в левой части равенства, за исключением второго и предпоследнего, взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

● **Упражнение.** Найти сумму $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$. (Отв. $1 - \frac{1}{n!}$.)

Указание. Замените каждое слагаемое разностью по формуле $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.)

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $n!$?
2. Найдите число $n!$ для $n = 11; 12$.
3. Может ли $n!$ кончатся ровно пятью нулями?

§ 6. Соединения и формула бинома Ньютона

1. Соединения. Пусть X — множество, состоящее из n элементов:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Элементами множества X могут быть различные объекты, объединенные каким-нибудь общим признаком или свойством. Например, X — множество студентов данного института, или множество четных чисел от 1 до 100, или множество букв латинского алфавита и т. д.

Из элементов множества X будем образовывать различные подмножества, содержащие каждое t элементов ($1 \leq t \leq n$), которые называются *соединениями*. В общем случае поставленную задачу можно сформулировать так: «Сколько существует подмножеств из n элементов множества X по t ?»

В зависимости от того, входит ли в соединение (в подмножество) все элементы множества X или часть их, играет ли роль порядок расположения элементов или не играет, различают три вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещения. Определение 1. *Размещениями из n элементов по t называются соединения, содержащие каждое t элементов из данных n элементов множества X , которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком.*

Например, из множества трех элементов $\{A, B, C\}$ можно образовать шесть размещений из трех элементов по два элемента:

$$(A; B), (A; C), (B; A), (C; A), (B; C), (C; B).$$

Из множества четырех элементов $\{A, B, C, D\}$ можно образовать двенадцать размещений из четырех элементов по два элемента (сделайте это самостоятельно).

Число размещений из n элементов по t обозначают символом A_n^m . Мы нашли, что $A_3^2 = 6$, $A_4^2 = 12$. Если $t = 1$, то, очевидно, что

$$A_n^1 = n,$$

так как из n различных элементов можно составить n различных размещений по одному элементу в каждом.

Поставим теперь общую задачу: сколько можно образовать размещений из n элементов по два элемента. Пусть на первом месте такого размещения стоит элемент x_1 , тогда на втором месте может стоять любой из элементов x_2, x_3, \dots, x_n . При этом получим $(n-1)$ размещений.

Пусть теперь на первом месте стоит элемент x_2 , тогда на втором месте может стоять любой из элементов x_1, x_3, \dots, x_n и будет еще $(n-1)$ размещений. Перебрав все элементы x_1, x_2, \dots, x_n получим n групп, в каждой из которых содержится $(n-1)$ размещений. Таким образом, всего размещений из n элементов по два будет $n(n-1)$.

Составим теперь размещения из n элементов по три элемента. В этом случае к каждому размещению из n элементов по два элемента следует добавить по очереди один элемент из $(n-2)$ оставшихся. Тогда получится $n(n-1)$ групп, в каждой из которых будет по $(n-2)$ размещений. Следовательно, всего размещений из n элементов по три элемента будет $n(n-1)(n-2)$.

Итак, мы нашли, что

$$A_n^1 = n; A_n^2 = n(n-1); A_n^3 = n(n-1)(n-2). \quad (1)$$

Перепишем формулы (1) в ином виде:

$$A_n^1 = n; A_n^2 = n[n-(2-1)]; A_n^3 = n(n-1)[n-(3-1)].$$

Из этих формул следует, что число размещений равно произведению последовательных убывающих натуральных чисел от n до $[n-(k-1)]$, где $k = 1, 2, 3$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим формулу

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)], \quad 1 \leq m \leq n, \quad (2)$$

из которой следует, что число всех различных размещений из n элементов по m в каждом равно произведению m последовательно убывающих на единицу чисел, из которых большее есть число n^1 .

◆ **Пример 1.** На первом курсе 6 учебных предметов и 4 лекции в день. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня?

Решение. Для решения поставленной задачи надо найти число размещений из шести элементов по четыре. По формуле (2) получаем:

$$A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Итак, составить расписание можно 360 способами.

Перестановки. Определение 2. Перестановками из данных n элементов множества X по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов и которые отличаются друг от друга только порядком элементов.

¹⁾ При строгом выводе формулы (2) следует применить метод математической индукции.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n .

Перестановки являются частным случаем размещений, когда $m = n$. По формуле (2)

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1. \quad (3)$$

Если воспользоваться символом $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$), то формулу (3) можно записать так:

$$P_n = n!, \quad (4)$$

т. е. число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$

◆ **Пример 2.** Сколькими способами можно составить список из 9 студентов?

Решение. Каждый список является перестановкой из 9 элементов. По формуле (4) получаем

$$P_9 = 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880.$$

Замечание. Формулу (2), если воспользоваться символом $n!$, можно записать так:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots [n-(m-1)](n-m)\dots 2 \cdot 1}{(n-m)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (5)$$

Чтобы формула (5) совпадала с формулой (4) при $m = n$ полагают, что $0! = 1$.

Сочетания. Определение 3. Сочетаниями из данных n элементов множества X по m называются соединения, которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Изменение порядка расположения элементов внутри сочетания во внимание не принимается. Например, из множества трех элементов $\{A, B, C\}$ можно составить только такие сочетания по два элемента в каждом: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$. Очевидно, что число сочетаний из трех элементов по три равно единице.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m . Мы нашли, что $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

Рассмотрим общий случай, когда $1 \leq m \leq n$. Пусть составлены все сочетания C_n^m из n элементов по m в каждом. Если в каждом из этих сочетаний переставим элементы всевозможными способами, то получим все размещения из n элементов по m , т. е.

$$A_n^m = C_n^m P_m. \quad (6)$$

Из формулы (6) получаем формулу для подсчета числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!}, \quad (7)$$

или, используя формулу (5),

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (8)$$

Например,

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

◆ **Пример 3.** Из 20 студентов нужно выбрать 6 для работы в приемной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Каждая выборка является сочетанием из 20 элементов по 6. Порядок расположения студентов в выборке не имеет значения. По формуле (7) получаем:

$$C_{20}^6 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 38760.$$

Из определений размещений, перестановок и сочетаний следует, что выражения A_n^m , P_n и C_n^m имеют смысл лишь для $1 \leq m \leq n$. Если $m = 0$, то считают $A_n^0 = 1$ и $C_n^0 = 1$, что согласуется с формулой (8). Полагая в ней $m = 0$, имеем

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Таким образом, можно считать, что формула (8) справедлива для $0 \leq m \leq n$.

В заключение докажем формулу

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}, \quad (9)$$

которая нам понадобится в следующем пункте.

Действительно,

$$\begin{aligned} C_n^{m+1} + C_n^m &= \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} = \\ &= \frac{n!}{m!(m+1)(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!(n-m-1)!(n-m)} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n-m} \right) = \frac{n!(n+1)}{m!(n-m-1)!(m+1)(n-m)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)![(n+1)-(m+1)]!} = C_{n+1}^{m+1},$$

что и требовалось доказать.

2. Формула бинома Ньютона. Для любого натурального числа n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^n b^n, \quad (10)$$

которая называется *формулой бинома Ньютона*.

Доказательство формулы (10) проведем методом математической индукции.

1) Проверяем верность формулы (10) при $n=1$:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a+b,$$

так как $C_1^0 = \frac{1!}{0! 1!} = 1$, $C_1^1 = \frac{1!}{1! 0!} = 1$.

2) Предполагая, что формула (10) верна для некоторого n , покажем, что она верна для $n+1$, т. е. докажем справедливость формулы

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \dots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}. \quad (11)$$

Действительно, используя сначала свойства степени с натуральным показателем, далее формулу (10), и, наконец, правило перемножения многочленов, получим:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = (C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots \\ &\quad \dots + C_n^n b^n) \cdot (a+b) = C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \dots + C_n^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \dots \\ &\quad \dots + C_n^n a b^n + C_n^0 a^n b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n b^{n+1}. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, имеем

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= C_n^0 a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^n b + \dots + (C_n^k + C_n^{k+1}) a^{n-k} b^{k+1} + \dots \\ &\quad \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a b^n + C_n^n b^{n+1}, \end{aligned}$$

откуда, в силу того что $C_{n+1}^0 = 1 = C_n^0$, $C_n^0 + C_n^1 = C_{n+1}^1$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^{n-1} + C_n^n = C_{n+1}^n$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$ (см. формулы (8), (9)), получаем формулу (11). Из 1) и 2) на основании метода математической индукции заключаем, что формула (10) верна для любого натурального числа n , что и требовалось доказать.

Правая часть формулы (10) называется *разложением бинома*. Коэффициенты C_n^0 , C_n^1 , ..., C_n^m , ..., C_n^n называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим основные следствия из формулы Ньютона.

1°. Число всех членов разложения на единицу больше показателя бинома.

Это видно из равенства (10).

2°. Сумма показателей степеней при a и b в любом слагаемом разложения равна n — показателю степени бинома.

3°. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны между собой, так как $C_n^m = C_n^{n-m}$.

4°. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Положив последовательно $k = 0, 1, 2, \dots, n$, получаем первый, второй и другие члены разложения. Например, $T_{0+1} = T_1 = C_n^0 a^{n-0} b^0 = C_n^0 a^n$ — первый член, $T_{1+1} = T_2 = C_n^1 a^{n-1} b^1 = C_n^1 a^{n-1} b$ — второй член, $T_{2+1} = T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ — третий член и т. д.

5°. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n .

В самом деле, полагая в формуле (10) $a = b = 1$, получаем

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^m + \dots + C_n^n.$$

Формулу (10) обычно коротко записывают так:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

[Символ \sum (греческая буква «сигма») обозначает знак суммирования (сложения)].

Из формулы (10), в частности, при $n=2$ и $n=3$ получаем хорошо знакомые формулы:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

• **Упражнения. 1.** Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(a+b)^6$. (Отв. $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.)

2. Найдите шестой член в разложении бинома $(a^2 - b^2)^{14}$.
(Отв. $T_6 = (-1)^5 \cdot C_{14}^5 \cdot (b^2)^5 \cdot (a^2)^{14-5} = 2002a^{18}b^{10}$.)

3. Упростите $(a+b)^5 + (a-b)^5$. (Отв. $2a(a^4 + 10a^2b^2 + 5b^4)$.)

4. Вычислите сумму биномиальных коэффициентов членов разложения $(a+b)^8$. (Отв. 256.)

5. Найдите показатель степени бинома $(a\sqrt{a} + b)^n$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024. (Отв. $n = 10$.)

Вопросы для самопроверки

1. Какие подмножества из элементов множества X называются соединениями?
2. Назовите виды соединений.
3. Сформулируйте определения соединений размещения, перестановок и сочетания. Чем они отличаются?
4. Что означают символы A_n^m , P_n , C_n^m ? Как они читаются?
5. Напишите формулы числа размещений из n элементов по m , числа перестановок из n элементов, числа сочетаний из n элементов по m .
6. Не вычисляя, ответьте на вопрос: во сколько раз число A_8^3 больше числа C_8^3 ?
7. Проверьте равенства: 1) $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^8}{P_8}$; 2) $C_{10}^7 + C_{10}^6 = C_{11}^7$; 3) $C_{10}^8 - C_{11}^8 + C_{10}^3 = 0$;
4) $12(A_7^5 + A_7^4) = A_8^7$; 5) $2(C_{15}^4 - C_{15}^3) = C_{16}^4$.
8. Докажите формулу бинома Ньютона.
9. Перечислите основные следствия из формулы бинома Ньютона.
10. Напишите формулы общих членов разложения биномов $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$. Чем отличаются эти формулы?

§ 7. Прогрессии

Из всевозможных числовых последовательностей¹⁾ здесь мы рассмотрим лишь последовательности, называемые арифметической и геометрической прогрессиями.

Арифметическая прогрессия. Определение 1. *Последовательность $\{x_n\}$, определяемая первым элементом x_1 и рекуррентным соотношением*

$$x_{n+1} = x_n + d,$$

где d — постоянное число, называется арифметической прогрессией. Число d называется разностью арифметической прогрессии.

¹⁾ Вспомним определение числовой последовательности: если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ поставлено в соответствие вещественное число x_n , то множество вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*.

Рекуррентное соотношение, определяющее арифметическую прогрессию, словами формулируется так: *всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом d .*

Запишем несколько первых членов арифметической прогрессии: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + d + d = x_1 + 2d$ и т. д. Каждый раз прибавляем еще одно слагаемое d . Например, четные числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $x_1 = 2$ и разностью $d = 2$:

$$2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; \dots$$

Докажем методом математической индукции формулу общего члена арифметической прогрессии

$$x_n = x_1 + d(n-1). \quad (1)$$

1) Для $n=1$ имеем $x_1 = x_1 + d \cdot 0$, т. е. формула (1) верна.

2) Предполагая справедливость формулы (1) для некоторого n , докажем, что она справедлива для $n+1$, т. е. докажем формулу

$$x_{n+1} = x_1 + d[(n+1)-1].$$

Действительно, по определению арифметической прогрессии, $x_{n+1} = x_n + d$. Отсюда, используя формулу (1), находим

$$x_{n+1} = x_1 + (n-1)d + d = x_1 + d[(n+1)-1],$$

что и требовалось доказать. На основании метода математической индукции заключаем, что формула (1) справедлива для любого n .

Выведем формулу суммы n членов арифметической прогрессии. Предварительно докажем основное свойство членов конечной арифметической прогрессии $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: *суммы членов прогрессии, равноотстоящих от концов, равны, т. е.*

$$x_m + x_n = x_k + x_l,$$

если $m+n = k+l$.

Действительно, используя формулу (1), получим

$$\begin{aligned} x_m + x_n &= x_1 + d(m-1) + x_1 + d(n-1) = 2x_1 + d(m+n-2) = \\ &= 2x_1 + d(k+l-2) = x_1 + d(k-1) + x_1 + d(l-1) = x_k + x_l, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Найдем теперь сумму S_n . Запишем ее дважды, расставив слагаемые в разном порядке:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n,$$

$$S_n = x_n + x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1.$$

Складывая почленно и используя доказанное свойство и формулу (1), находим

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \dots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) = n(x_1 + x_n) = n[2x_1 + d(n-1)],$$

откуда получаем следующие две формулы:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2} \text{ и } S_n = \frac{[2x_1 + d(n-1)] \cdot n}{2}.$$

◆ **Пример 1.** Написать формулу общего члена последовательности, если известны несколько ее первых членов: 3, 5, 7, 9, 11,

Решение. Заданные числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $x_1 = 3$ и разностью $d = 2$. По формуле (1) имеем

$$x_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1.$$

◆ **Пример 2.** Сумма первых n членов последовательности выражается формулой $S_n = 3n^2$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией; найти ее первый член и разность.

Решение. Имеем $x_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 = 3(2n-1)$. Так как разность $x_n - x_{n-1} = 3(2n-1) - 3(2n-3) = 6n - 3 - 6n + 9 = 6$ не зависит от n , то данная последовательность является арифметической прогрессией с разностью $d = 6$. Первый член прогрессии $x_1 = S_1 = 3$.

● **Упражнение.** Найдите сумму шести членов арифметической прогрессии, если $x_1 = 7$, $x_8 = 35$. (Отв. $S_6 = 102$.)

Геометрическая прогрессия. Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$, определенная первым элементом x_1 и рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n \cdot q,$$

где q — постоянное число ($q \neq 1$), называется геометрической прогрессией. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Рекуррентное соотношение, определяющее геометрическую прогрессию, словами формулируется так: *всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число q .*

Запишем несколько первых членов геометрической прогрессии: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 \cdot q$, $x_3 = x_2 \cdot q = x_1 \cdot qq = x_1 \cdot q^2$ и т. д. Например, числа 2, 6, 18, 54,

162, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=3$ и первым членом $x_1=2$.

Формула общего члена геометрической прогрессии

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1} \quad (2)$$

доказывается точно также, как формула общего члена арифметической прогрессии. (Проделайте это самостоятельно.)

Выведем формулу суммы n членов геометрической прогрессии. Для этого рассмотрим сумму

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (3)$$

и умножим обе части равенства (3) на q .

Так как $x_1 \cdot q = x_2$, $x_2 \cdot q = x_3$, ..., $x_n \cdot q = x_{n+1}$, то

$$S_n \cdot q = x_1 q + x_2 q + \dots + x_n q = x_2 + x_3 + \dots + x_{n+1} \quad (4)$$

Вычтем почленно из равенства (4) равенство (3). Все члены, кроме $x_{n+1} = x_n q$ и x_1 , уничтожаются. Поэтому получаем

$$S_n q - S_n = x_{n+1} - x_1 = x_n q - x_1,$$

откуда

$$S_n = \frac{x_n q - x_1}{q - 1} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{x_1 - x_n q}{1 - q}. \quad (5)$$

Так как $x_n = x_1 q^{n-1}$, то формулы (5) можно записать в другом виде:

$$S_n = \frac{x_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{x_1 (1 - q^n)}{1 - q}. \quad (6)$$

◆ **Пример 3.** В геометрической прогрессии 1; -2; 4; -8; 16; найти 11-й член и сумму 6 членов.

Решение. Найдем сначала знаменатель геометрической прогрессии. Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением. Имеем

$$q = \frac{x_{n+1}}{x_n}; \quad q = \frac{x_5}{x_4} = \frac{16}{-8} = -2.$$

По формуле (2) вычислим 11-й член:

$$x_{11} = x_1 q^{11-1} = 1(-2)^{10} = 1024,$$

а по первой из формул (6) вычислим сумму шести членов:

$$S_6 = \frac{1 \cdot [(-2)^6 - 1]}{-2 - 1} = \frac{64 - 1}{-3} = -21.$$

● **Упражнение.** В геометрической прогрессии $x_1 = 125$, $x_n = 8$, $S_n = 203$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии и число ее членов.

(Отв. $\frac{2}{5}$; 4. У к а з а н и е. Выразите сумму n членов геометрической прогрессии через x_1 , x_n и q .)

Вопросы для самопроверки

1. Напишите определение числовой последовательности.
2. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
3. Сформулируйте словами рекуррентное соотношение $x_{n+1} = x_n + d$, определяющее арифметическую прогрессию.
4. Выведите формулу любого члена арифметической прогрессии.
5. Каким основным свойством обладает сумма членов, равноудаленных от концов арифметической прогрессии?
6. Выведите формулу суммы n членов арифметической прогрессии.
7. Какая последовательность называется геометрической прогрессией?
8. Сформулируйте словами рекуррентное соотношение $x_{n+1} = x_n \cdot q$, определяющее геометрическую прогрессию.
9. Выведите формулу любого члена геометрической прогрессии.
10. Выведите формулу суммы n членов геометрической прогрессии.

§ 8. Функция

1. Определение функции. Определение 1. Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Функцией f называется множество упорядоченных пар чисел $(x; y)$ ¹⁾ таких, что $x \in X$, $y \in Y$ и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит по крайней мере в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y и пишут $y = f(x)$. Число y называется значением функции f в точке x . Переменную y называют зависимой переменной, а переменную x — независимой переменной (или аргументом); множество X — областью определения (или существования) функции, а множество Y — множеством значений функции.

Кроме буквы f для обозначения функций используют другие буквы латинского и греческого алфавитов, например: $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$ и т. д. Другими буквами обозначают зависимую и независимую переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

¹⁾ Напомним, что пара чисел x и y называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел мы записываем в виде $(x; y)$, где x — первое число, y — второе.

Область определения функции X задается вместе с заданием самой функции, а множество значений функции Y вычисляется по данной области определения функции. Например, областью определения функции $y = \sin x$ является множество всех вещественных чисел, а множество значений функции есть множество всех чисел, заключенных между -1 и 1 , т. е. $X = (-\infty, +\infty)$ и $Y = [-1, 1]$; областью определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является множество всех чисел, заключенных между -1 и 1 , а множество значений функции есть множество всех чисел, заключенных между 0 и 1 , т. е. $X = [-1, 1]$ и $Y = [0, 1]$.

Пусть на некотором множестве X определена функция $f(x)$, тогда значение этой функции, соответствующее некоторому значению аргумента x_0 , обозначают $f(x_0)$. Например, если $f(x) = x^2$, то $f(3) = 3^2 = 9$, $f(-2) = (-2)^2 = 4$ и т. д.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянная функция обозначается буквой C ($f(x) = C$).

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X , если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Например, функция $f(x) = x$ возрастает на множестве $X = (-\infty, +\infty)$; функция $f(x) = \sin x$ возрастает на множестве $X = [-\pi/2, \pi/2]$ и убывает на множестве $X = [\pi/2, 3\pi/2]$.

На плоскости функция изображается в виде графика — множества точек (x, y) , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым *уравнением графика*.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую) и может состоять из отдельных точек, например, график функции $y = n!$

2. Четные и нечетные функции. Определение 2. Функция $f(x)$ называется *четной*, если область ее определения X есть множество, симметричное относительно начала координат, и если при любом x из X имеет место равенство

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если область ее определения X есть множество, симметричное относительно начала

координат, и если при любом x из X имеет место равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Сумма и разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная).

Действительно, пусть $\varphi(x) = f(x) + g(x)$. Тогда, если $f(x)$ и $g(x)$ — четные, то

$$\varphi(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = \varphi(x).$$

Если же $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то $\varphi(x)$ также будет нечетной,

$$\varphi(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -\varphi(x).$$

Аналогичное доказательство для разности функций.

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.

В самом деле, пусть $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, тогда

$$\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = \varphi(x);$$

если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то

$$\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = \varphi(x);$$

если же $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функции, то

$$\varphi(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -\varphi(x).$$

Рассмотрим примеры.

◆ **Пример 1.** Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ — четная.

Решение. Область определения функции: $-1 \leq x \leq 1$; $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$. Следовательно, данная функция четная.

◆ **Пример 2.** Доказать, что функция $f(x) = x^5 - x^3 + x$ — нечетная.

Решение. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$; $f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 + (-x) = -x^5 + x^3 - x = -(x^5 - x^3 + x) = -f(x)$. Следовательно, функция нечетная.

◆ **Пример 3.** Является ли функция $f(x) = x^4 + x^2$, определенная на множестве $X = [-2, 10)$, четной?

Решение. Эта функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат. Хотя формально $f(-x) = f(x)$.

◆ **Пример 4.** Исследовать на четность и нечетность функцию

$$f(x) = x^2 + x - 1.$$

Решение. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$; $f(-x) = (-x)^2 + (-x) - 1 = x^2 - x - 1 \neq f(x)$, т. е. функция не удовлетворяет равенствам $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

● **Упражнения.** Определите, какая из функций является четной, нечетной и какая не является ни четной, ни нечетной:

1. $y = \cos x + x \sin x$. (Отв. Четная.) 2. $y = x \cdot 2^{-x}$. (Отв. Ни четная, ни

нечетная.) 3. $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$. (Отв. Четная.) 4. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x$. (Отв. Нечет-

ная.) 5. $y = \frac{x}{\sin x}$. (Отв. Четная.) 6. $y = 5 \log_2(x+1)$. (Отв. Ни четная, ни

нечетная.) 7. $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$. (Отв. Нечетная.) 8. $y = x^2 - x$. (Отв. Ни

четная, ни нечетная.) 9. $y = x^3 + x^2$. (Отв. Ни четная, ни нечетная.)

10. $y = x^2 + 3x - 1$. (Отв. Ни четная, ни нечетная.) 11. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

(Отв. Четная.) 12. $y = x^3 + 2x$. (Отв. Нечетная.) 13. $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

(Отв. Нечетная.) 14. $y = x \lg \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. (Отв. Нечетная.)

3. Периодические функции. Определение 4. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции. Если T — период функции, то ее периодом является также и число $-T$, так как

$$f(x - T) = f[(x - T) + T] = f(x).$$

Обычно под периодом функции понимают наименьший из положительных периодов, если такой период существует. Например, периодом функций $\sin x$ и $\cos x$ является число $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, а функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — число $T = \pi$.

Если T — период функции, то ее периодом будет также и число kT , где k — любое целое число ($k = \pm 1; \pm 2; \dots$). Действительно,

$$f(x \pm 2T) = f[(x \pm T) \pm T] = f(x \pm T) = f(x),$$

$$f(x \pm 3T) = f[(x \pm 2T) \pm T] = f(x \pm 2T) = f(x) \text{ и т. д.}$$

Например,

$$\sin(x + 4\pi) = \sin[(x + 2\pi) + 2\pi] = \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad (k = 2).$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ — периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом их суммы, произведения, разности и частного является число T , кратное T_1 и T_2 . Действительно, пусть $T = k_1 T_1$ и $T = k_2 T_2$, где k_1 и k_2 — целые числа. Как было показано, число T является периодом функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда для функции $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ получаем

$$\varphi(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x + k_1 T_1) + g(x + k_2 T_2) = f(x) + g(x);$$

для функции $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ имеем

$$\varphi(x + T) = f(x + T) \cdot g(x + T) = f(x + k_1 T_1) \cdot g(x + k_2 T_2) = f(x) \cdot g(x) \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим примеры.

◆ **Пример 5.** Показать, что функция $f(x) = \sin \omega x$ имеет период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\omega \neq 0).$$

Решение. Имеем:

$$\sin \left[\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] = \sin(\omega x + 2\pi) = \sin \omega x.$$

◆ **Пример 6.** Показать, что функция $f(x) = \sin(5x + 3)$ имеет период

$$T = \frac{2\pi}{5}.$$

Решение. Имеем:

$$\sin\left[5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + 3\right] = \sin(5x + 2\pi + 3) = \sin[(5x + 3) + 2\pi] = \sin(5x + 3).$$

◆ **Пример 7.** Показать, что число $T = 12\pi$ есть период функции

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos \frac{x}{3}}.$$

Решение. Период $\sin \frac{x}{2}$ есть $T_1 = \frac{2\pi}{(1/2)} = 4\pi$ (см. пример 5). Период $\cos \frac{x}{3}$, следовательно, и $\sqrt{\cos \frac{x}{3}}$ есть $T_2 = 6\pi$. Наименьшее положительное число T , кратное 4π и 6π , есть 12π . Поэтому $T = 12\pi$ — период функции.

● **Упражнения.** Найти период функций:

1. $y = \sin 4x$. (Отв. $\pi/2$.)
2. $y = \operatorname{tg}(x/2)$. (Отв. 2π .)
3. $y = \sin x + \cos 2x$. (Отв. 2π .)
4. $y = \cos^2 3x$. (Отв. $\pi/3$.)
5. $y = \sin 3x + \sin 2x$. (Отв. 2π .)
6. $y = \sin(3x + 1)$. (Отв. $2\pi/3$.)
7. $y = |\sin x|$. (Отв. π . Указание. $|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$.)
8. $y = \sin^2(x/3)$. (Отв. 3π .)
9. $y = |\cos(x/2)|$. (Отв. 2π .)
10. $y = \cos(3x/2) + \sin(x/3)$. (Отв. 12π .)

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции. С помощью какого первичного понятия определяется функция?
2. Что называется областью определения функции и множеством значений функции?
3. Что называется постоянной функцией?
4. Какие функции называются возрастающими, убывающими?
5. Что называется графиком функции? Приведите примеры.
6. Какие функции называются четными и какие нечетными и в чем состоит геометрический смысл четности и нечетности функций?
7. Какие функции называются периодическими и что называется периодом функции?

§ 9. Простейшие элементарные функции. Сложная функция

Постоянная функция $f(x) = C$, $C = \text{const}$, степенная функция x^α (α — любое число), показательная функция a^x ($0 < a \neq 1$), логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$), тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg} x$, $\text{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\text{arctg} x$, $\text{arcctg} x$ называются *простейшими элементарными функциями*.

Очень важно хорошо знать основные свойства и графики простейших элементарных функций, так как эти функции играют важную роль в раскрытии многих математических понятий и составляют базу для изучения более сложных функций.

Дадим краткое описание простейших элементарных функций, оставаясь в рамках элементарной математики.

Постоянная функция. Эта функция имеет одно и то же значение для всех значений аргумента. График функции — прямая, параллельная оси Ox .

Степенная функция. Свойства и график этой функции зависят от значений показателя α . Рассмотрим наиболее типичные случаи.

1. $y = x$ ($\alpha = 1$). Область определения функции — вся числовая прямая. Функция не периодическая, нечетная, возрастает на всем промежутке $-\infty < x < +\infty$.

График функции — прямая линия, проходящая через начало координат и являющаяся биссектрисой первого и третьего координатных углов (рис. 1).

2. $y = x^2$ ($\alpha = 2$). Область определения функции — вся числовая прямая, множество значений: $0 \leq y < +\infty$. Функция не является периодической, четная. Функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$, убывает на промежутке $-\infty < x \leq 0$ и возрастает на промежутке $0 \leq x < +\infty$.

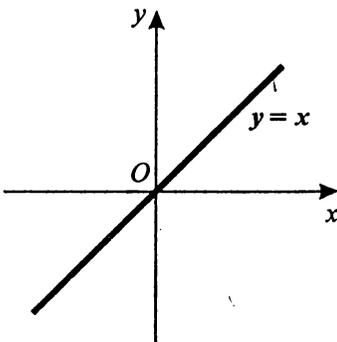


Рис. 1

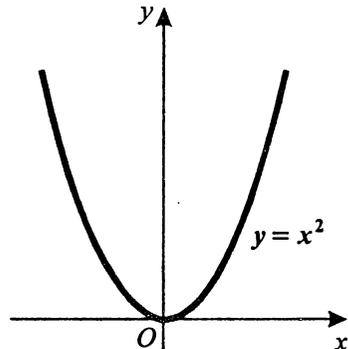


Рис. 2

Графиком функции является линия, называемая параболой, проходящая через начало координат и симметричная относительно оси Oy (рис. 2).

3. $y = x^3$ ($\alpha = 3$). Область определения функции — вся числовая прямая, множество значений: $-\infty < y < +\infty$. Функция не периодическая, нечетная, возрастает на всем промежутке $-\infty < x < +\infty$.

График функции — линия, называемая кубической параболой, проходящая через начало координат и расположенная в первой и третьей четвертях симметрично относительно начала координат (рис. 3).

4. $y = \sqrt{x}$ ($\alpha = \frac{1}{2}$). Область определения функции: $0 \leq x < +\infty$, множество значений: $0 \leq y < +\infty$. Функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$. Функция не является периодической, не является ни четной, ни нечетной, возрастает на всем промежутке $0 \leq x < +\infty$.

График функции изображен на рис. 4.

5. $y = \frac{1}{x}$ ($\alpha = -1$). Область определения функции: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$, множество значений: $-\infty < y < 0$ и $0 < y < +\infty$. Функция не является периодической. Точек пересечения с осями нет.

Графиком функции является линия, называемая гиперболой. Расположена в первой и третьей четвертях и в силу нечетности функции симметрична относительно начала координат (рис. 5).

6. $y = \frac{1}{x^2}$ ($\alpha = -2$). Область определения функции: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$, множество значений: $0 < y < +\infty$. Функция не является периодической, четная. Точек пересечения с осями координат нет.

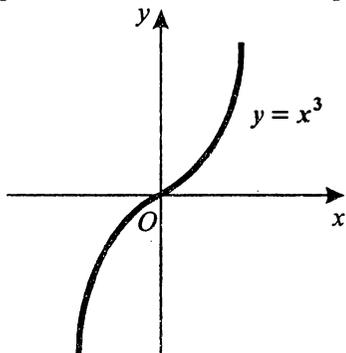


Рис. 3

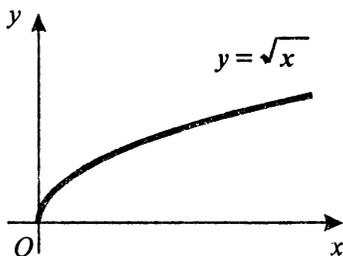


Рис. 4

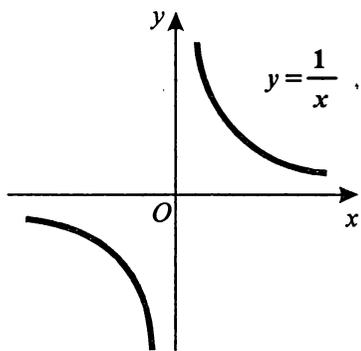


Рис. 5

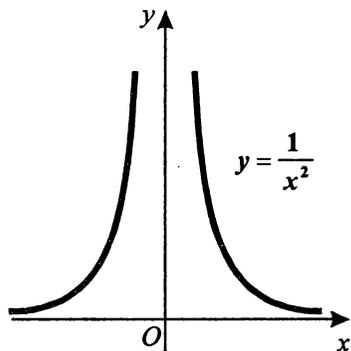


Рис. 6

Графиком функции является линия, расположенная в первой и второй четвертях симметрично относительно оси Oy (рис. 6).

Показательная функция $y = a^x$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, множество значений: $0 < y < +\infty$. Функция не является периодической, не является ни четной, ни нечетной. Если $a > 1$, то функция возрастает на промежутке $-\infty < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то функция убывает на промежутке $-\infty < x < +\infty$. Точка $(0; 1)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики функций для $a > 1$ и для $0 < a < 1$ изображены на рис. 7.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$. Область определения функции: $0 < x < +\infty$, множество значений: $-\infty < y < +\infty$. Функция не является периодической, не является ни четной, ни нечетной. Если $a > 1$, то функция возрастает на промежутке $0 < x < +\infty$, если $0 < a < 1$ — убывает на том же промежутке. Точка $(0; 1)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

Графики функций для $a > 1$ и для $0 < a < 1$ изображены на рис. 8.

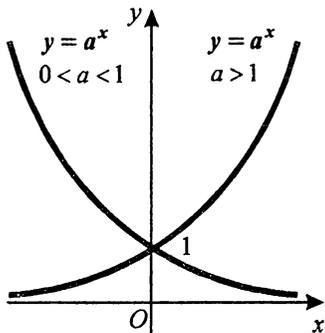


Рис. 7

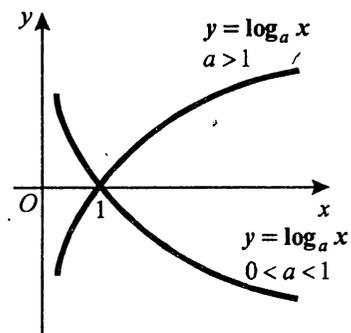


Рис. 8

Тригонометрические функции.

1. $y = \sin x$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, множество значений: $-1 \leq y \leq 1$. Функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при каждом $x = -\pi/2 + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и наибольшее значение $y = 1$ при каждом $x = \pi/2 + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Функция периодическая, период $T = 2\pi$, нечетная. Точки $(\pi k; 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — точки пересечения с осями координат.

График функции $y = \sin x$ изображен на рис. 9.

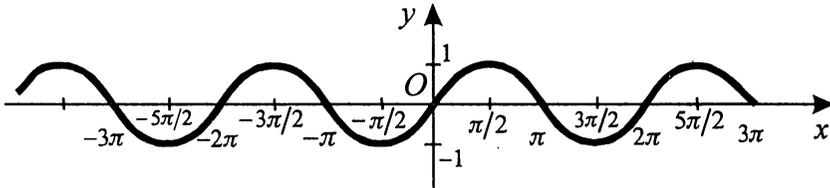


Рис. 9

2. $y = \cos x$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, множество значений: $-1 \leq y \leq 1$. Функция принимает наименьшее значение $y = -1$ при каждом $x = 2\pi k + \pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и наибольшее значение $y = 1$ при каждом $x = 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Функция периодическая, период $T = 2\pi$, четная. Точки $(\pi/2 + \pi k; 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — точки пересечения с осью Ox . Точка $(0; 1)$ — точка пересечения с осью Oy .

График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 10.

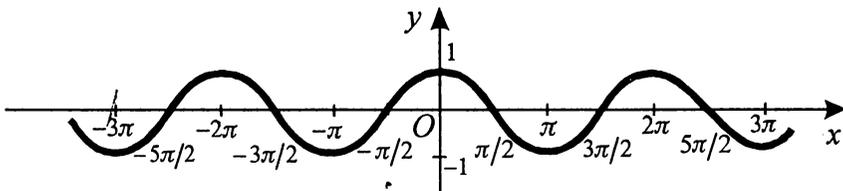


Рис. 10

Обратные тригонометрические функции.

1. $y = \arcsin x$. Область определения функции: $-1 \leq x \leq 1$, множество значений: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Функция принимает наименьшее значение $y = -\pi/2$ при $x = -1$ и наибольшее значение $y = \pi/2$ при $x = 1$. Функция не является периодической, нечетная. Функция возрастает на промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Точка $(0; 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

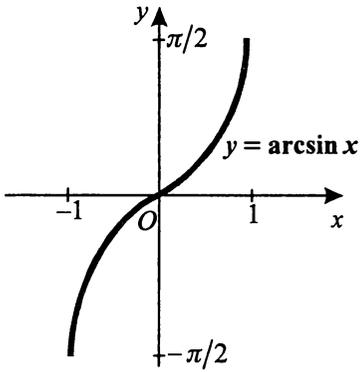


Рис. 11

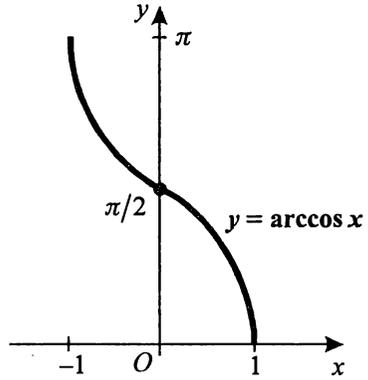


Рис. 12

График функции изображен на рис. 11.

2. $y = \arccos x$. Область определения функции: $-1 \leq x \leq 1$, множество значений: $0 \leq y \leq \pi$. Функция принимает наибольшее значение $y = \pi$ при $x = -1$ и наименьшее значение $y = 0$ при $x = 1$. Функция не является периодической, не является ни четной, ни нечетной. Функция убывает на промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Точки $(0; \pi/2)$ и $(1; 0)$ — точки пересечения с осями координат.

График функции изображен на рис. 12.

3. $y = \operatorname{arctg} x$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, множество значений: $-\pi/2 < y < \pi/2$. Функция не является периодической, нечетная. Функция возрастает на промежутке $-\infty < x < +\infty$. Точка $(0; 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

График функции изображен на рис. 13.

4. $y = \operatorname{arccctg} x$. Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$, множество значений: $0 < y < \pi$. Функция не является периодической, не является ни четной, ни нечетной. Функция убывает на промежутке $-\infty < x < +\infty$. Точка $(0; \pi/2)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

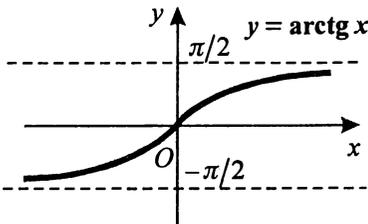


Рис. 13

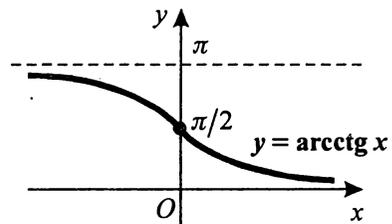


Рис. 14

График функции изображен на рис. 14.

Рассмотренные простейшие элементарные функции будут неоднократно встречаться в следующем параграфе.

Сложная функция. Пусть на некотором множестве X определена функция $z = \varphi(x)$ со множеством значений Z , а на множестве Z — функция $y = f(z)$, тогда функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией* от x , а переменная z — промежуточной переменной сложной функции.

Например, функция $y = \sin x^2$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y = f(z) = \sin z$, $z = \varphi(x) = x^2$.

Сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$ называют часто *суперпозицией* двух функций.

Далее мы рассмотрим примеры, показывающие, как построить график сложной функции $y = f[\varphi(x)]$, зная график функции $z = \varphi(x)$ и свойства функции $y = f(z)$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?
2. Что называется сложной функцией?
3. Что называется промежуточной переменной сложной функции?
4. Покажите, что $y = \sin x^2$ — сложная функция.

§ 10. Построение графиков функций

Предложим следующую методику построения графиков функций, основанную на применении некоторых правил построения по уже известным графикам функций.

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = f(x - a)$. График функции $y = f(x - a)$ может быть получен следующим образом: отправляясь от произвольной точки x , в которой ордината $f(x)$ известна, найдем точку x_1 , в которой ордината $f(x_1 - a)$ имеет ту же величину, т. е. выполняется равенство

$$f(x_1 - a) = f(x).$$

Для того чтобы данное равенство выполнялось, очевидно, достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$x_1 - a = x,$$

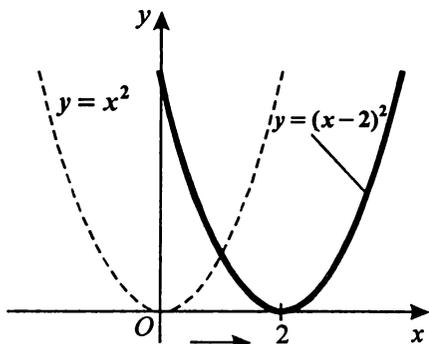


Рис. 15

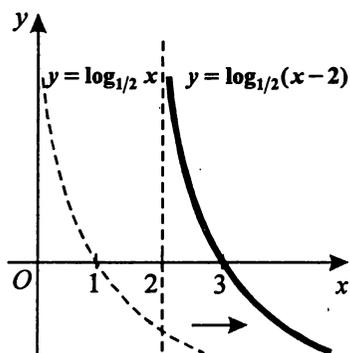


Рис. 16

откуда находим $x_1 = x + a$ ¹⁾.

Правило 1. Чтобы получить график функции $y = f(x - a)$ из графика $y = f(x)$, нужно график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Ox на a вправо, если $a > 0$, или на $|a|$ влево, если $a < 0$.

◆ **Пример 1.** Используя правило 1, построить графики функций:

1) $y = (x - 2)^2$; 2) $y = \log_{1/2}(x - 2)$; 3) $y = \frac{1}{x + 2}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 15, 16 и 17.

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = (x + 2)^2$.

2. $y = \log_{1/2}(x + 2)$.

3. $y = 3^{x+2}$.

4. $y = \frac{1}{x - 2}$.

5. $y = \frac{1}{x + 1}$.

6. $y = \sqrt{x + 1}$.

7. $y = \sqrt{x - 1}$.

8. $y = \log_2(x - 2)$.

9. $y = \log_2(x + 2)$.

10. $y = \cos(x + \pi/6)$.

11. $y = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$.

12. $y = \arccos(x - 2)$.

13. $y = \operatorname{arccctg}(x - 1/4)$.

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции

$$y = f(x) + c.$$

Правило 2. Чтобы получить ординату графика функции $y = f(x) + c$ в точке x из ординаты графика $y = f(x)$ в той же точке, нужно график $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Oy вверх на c , если $c > 0$, или на $|c|$ вниз, если $c < 0$.

¹⁾ В самом деле, если $x_1 = x + a$, то $f(x_1 - a) = f(x + a - a) = f(x)$.

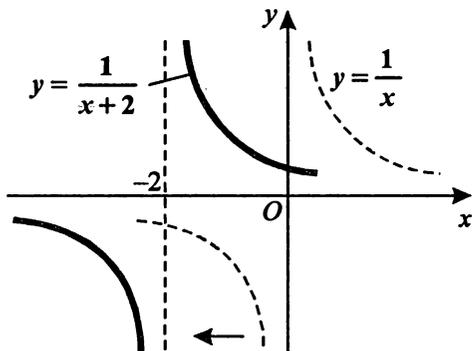


Рис. 17

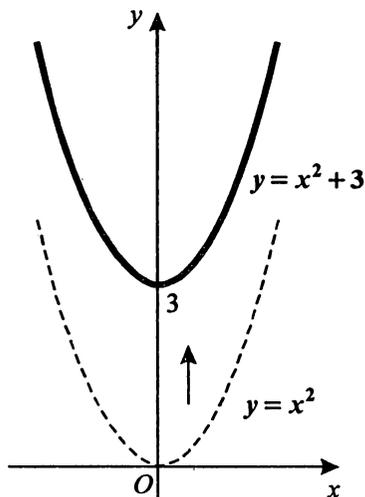


Рис. 18

◆ **Пример 2.** Используя правило 2, построить графики функций:

1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = \sin x + 2$; 3) $y = \frac{1}{x} - 1$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 18, 19 и 20.

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = x^2 - 3$.

2. $y = \sin x - 2$.

3. $y = 1/x + 1$.

4. $y = \sqrt{x} + 1$.

5. $y = 3^x - 1$.

6. $y = \log_{1/2} x + 1$.

7. $y = \sqrt[3]{x} + 1$.

8. $y = \arctg x + 1$.

9. $y = (1/2)^x + 1$.

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = -f(x)$.

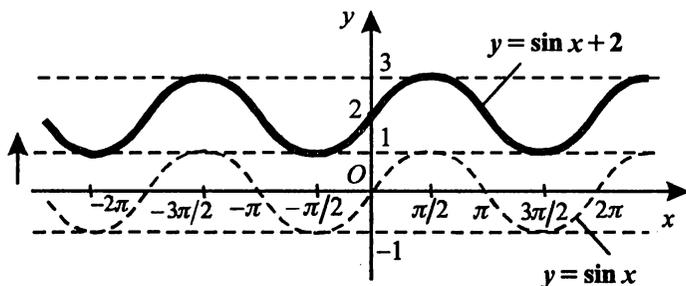


Рис. 19

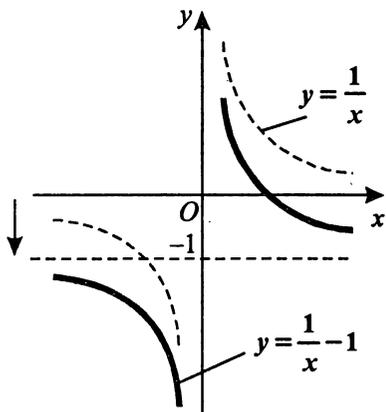


Рис. 20

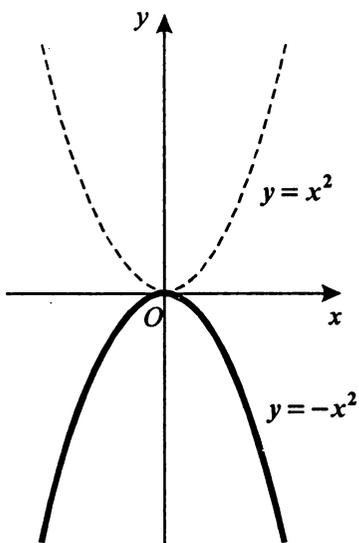


Рис. 21

Правило 3. Чтобы получить ординату графика функции $y = -f(x)$ в точке x из ординаты графика функции $y = f(x)$ в той же точке, нужно у ординаты графика функции $y = f(x)$ изменить знак на обратный. Таким образом, график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Ox .

◆ **Пример 3.** Используя правило 3, построить графики функций:

- 1) $y = -x^2$; 2) $y = -\cos x$; 3) $y = -\sqrt{x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 21, 22 и 23.

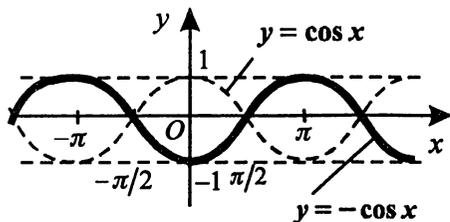


Рис. 22

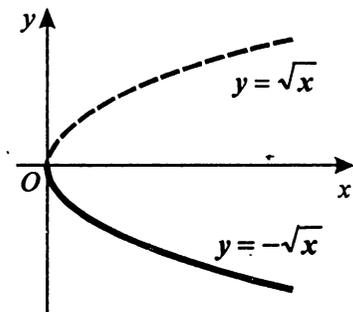


Рис. 23

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

- | | | |
|--------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| 1. $y = -x^3$. | 2. $y = -\sqrt[3]{x}$. | 3. $y = -1/x$. |
| 4. $y = -3^x$. | 5. $y = -(1/2)^x$. | 6. $y = -\log_3 x$. |
| 7. $y = -\sin x$. | 8. $y = -\operatorname{tg} x$. | 9. $y = -\operatorname{arctg} x$. |

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = f(-x)$.

Правило 4. Чтобы получить ординату графика функции $y = f(-x)$ в точке x из ординаты графика $y = f(x)$ в той же точке, нужно значение x умножить на -1 . Таким образом, график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Oy .

◆ **Пример 4.** Используя правило 4, построить графики функций:

- 1) $y = \sqrt{-x}$; 2) $y = \log_2(-x)$; 3) $y = 3^{-x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 24, 25 и 26.

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| 1. $y = \log_{1/2}(-x)$. | 2. $y = (1/2)^{-x}$. | 3. $y = \sqrt[3]{-x}$. |
| 4. $y = \arcsin(-x)$. | 5. $y = \operatorname{arctg}(-x)$. | |

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = kf(x)$.

Правило 5. Чтобы получить ординату графика функции $y = kf(x)$ в точке x из ординаты графика функции $y = f(x)$ в той же точке, нужно значение ординаты $f(x)$ умножить на число k .

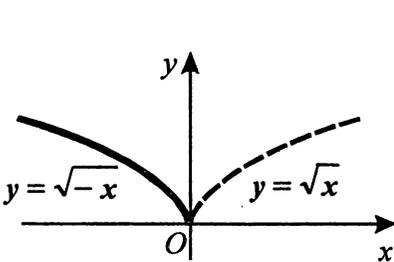


Рис. 24

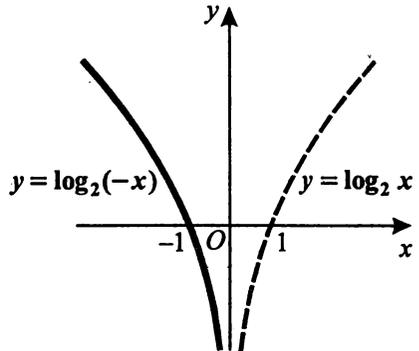


Рис. 25

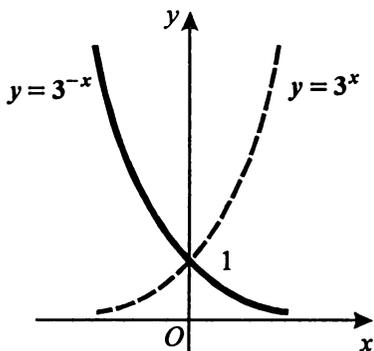


Рис. 26

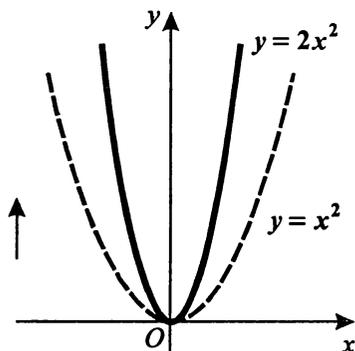


Рис. 27

При этом от умножения всех значений функции $f(x)$ на $k > 1$ ординаты графика функции увеличиваются в k раз и происходит «растяжение» графика функции $y = f(x)$ от оси Ox в k раз, а от умножения на k при $0 < k < 1$ ординаты графика функции уменьшаются в k раз и происходит «сжатие» графика функции $y = f(x)$ к оси Ox в k раз.

◆ **Пример 5.** Используя правило 5, построить графики функций:

1) $y = 2x^2$; 2) $y = 2 \sin x$; 3) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 27, 28, 29.

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = \frac{1}{2}x^2$.

2. $y = \frac{1}{2} \sin x$.

3. $y = 2\sqrt{x}$.

4. $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

5. $y = \frac{3}{x}$.

6. $y = \frac{1}{2} \log_{1/2} x$.

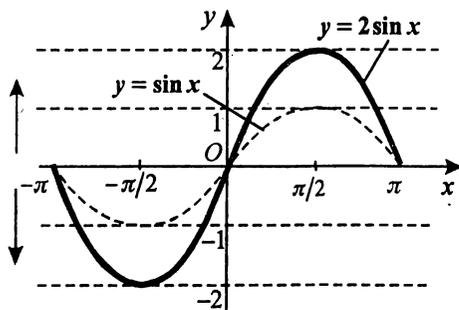


Рис. 28

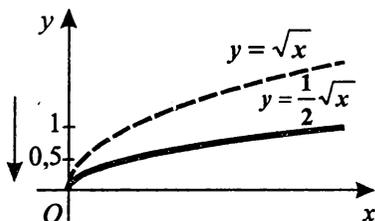


Рис. 29

7. $y = 2 \cdot 2^x$. 8. $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$. 9. $y = \frac{1}{2} \arccos x$.
10. $y = 2 \arctg x$. 11. $y = 2 \log_{1/2} x$.

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = f(kx)$. Отправляясь от произвольной точки x , в которой известна ордината $f(x)$, найдем точку x_1 , в которой график функции $y = f(kx_1)$ имеет ту же ординату, т. е. выполняется равенство

$$f(x) = f(kx_1).$$

Для того чтобы это равенство выполнялось¹⁾, очевидно, достаточно выполнение равенства $x = kx_1$, откуда находим $x_1 = \frac{1}{k}x$.

Правило 6. Чтобы построить график $y = f(kx)$, достаточно значение x разделить на число k .

При этом от деления на $k > 1$ всех значений аргумента функции $y = f(x)$ график функции «сжимается» к оси Oy в $1/k$ раз, а от деления на k при $0 < k < 1$ график функции «растягивается» от оси Oy в $1/k$ раз.

◆ **Пример 6.** Используя правило 6, построить графики функций:

- 1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \arcsin 2x$; 3) $y = \sqrt{x/2}$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 30, 31 и 32.

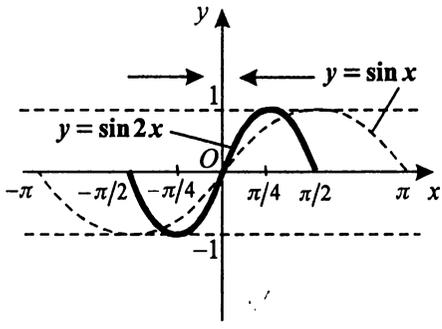


Рис. 30

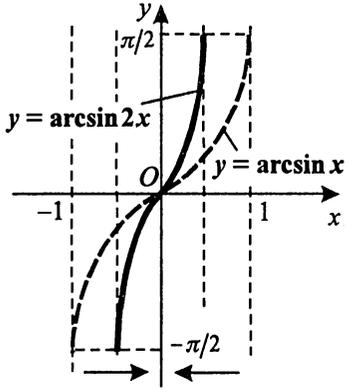


Рис. 31

¹⁾ Проверьте данный факт.

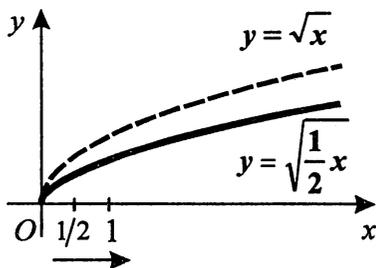


Рис. 32

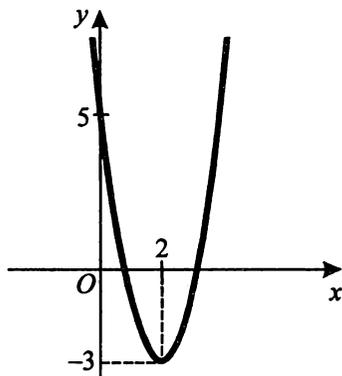


Рис. 33

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = \sin(x/2)$.

2. $y = \arcsin(x/2)$.

3. $y = \sqrt{2x}$.

4. $y = \sqrt[3]{8x}$.

5. $y = 5^{x/2}$.

6. $y = (0,5)^{3x}$.

7. $y = \log_{1/3} 2x$.

8. $y = \cos(x/2)$.

9. $y = \operatorname{tg} 2x$.

10. $y = \arccos 3x$.

Прежде чем сформулировать следующее правило, построим график функции, последовательно применяя несколько правил.

◆ **Пример 7.** Построить график функции $y = 2x^2 - 8x + 5$.

Преобразуем квадратный трехчлен, выделяя полный квадрат, к виду

$$y = 2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left[(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right] = 2(x-2)^2 - 3$$

и построение будем выполнять в следующем порядке: 1) график функции $y = x^2$ считаем известным; 2) по правилу 5 строим график функции $y = 2x^2$; 3) по правилу 1 строим график функции $y = 2(x-2)^2$; 4) по правилу 2 строим график искомой функции $y = 2(x-2)^2 - 3$ (рис. 33).

Получен график параболы $y = 2x^2$, смещенный на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз. Аналогично строится график любого квадратного трехчлена.

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = 2(x-5)^2 - 1$.

2. $y = -2 - (x+3)^2/2$.

3. $y = x^2 - 4x + 1$.

4. $y = 3x - x^2$.

5. $y = 4 - 2x^2 - 2x$.

6. $y = 4x - x^2 - 3$.

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = |f(x)|$.
Имеем

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}^1$$

Правило 7. Чтобы получить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, надо участки графика $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox , оставить без изменения, а участки ниже оси Ox зеркально отразить относительно этой оси.

◆ **Пример 8.** Используя правило 7, построить график функции $y = |x|$.

Строим график функции $y = x$ (рис. 34). Далее, участок графика $y = x$, лежащий выше оси Ox (при $x \geq 0$), оставляем без изменения, а участок ниже оси Ox (при $x < 0$) зеркально отражаем относительно этой оси; в результате получаем график функции $y = |x|$.

◆ **Пример 9.** Построить график функции $y = |x + 1|$.

Строим график функции $y = x + 1$ (рис. 35). Затем участок графика $y = x + 1$, лежащий выше оси Ox (при $x \geq -1$), оставляем без изменения, а участок ниже оси Ox (при $x < -1$) зеркально отражаем относительно этой оси; в результате получаем график функции $y = |x + 1|$. Этот же график можно было получить, построив сначала график функции $y = |x|$ и применив затем правило 1.

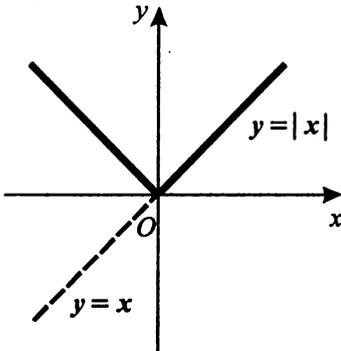


Рис. 34

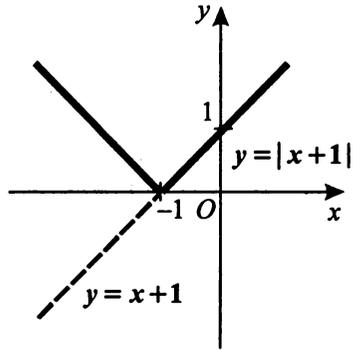


Рис. 35

¹⁾ К сожалению, иногда пишут неверное равенство

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } x > 0, \\ -f(x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

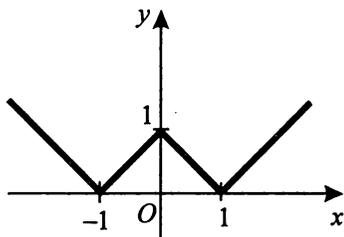


Рис. 36

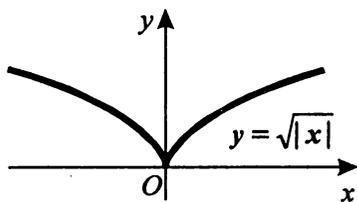


Рис. 37

◆ **Пример 10.** Построить график функции $y = |1 - |x||$.

Построение проведем в следующем порядке: 1) график функции $y = |x|$ считаем известным (см. рис. 34); 2) строим график $y = -|x|$ (по правилу 3); 3) строим график $y = 1 - |x|$ (по правилу 2); 4) строим график искомой функции $y = |1 - |x||$ (по правилу 7). График функции $y = |1 - |x||$ построен на рис. 36.

Дан график функции $y = f(x)$. Построим график функции $y = f(|x|)$. Так как $f(-x) = f(|x|)$, то функция $y = f(|x|)$ является четной, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy . Кроме того, при $x \geq 0$ $f(|x|) = f(x)$.

Правило 8. Чтобы получить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, надо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$ и отразить его зеркально относительно оси Oy .

◆ **Пример 11.** Используя правило 8, построить графики функций:

1) $y = \sqrt{|x|}$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y = \sin |x|$.

Графики данных функций построены соответственно на рис. 37, 38 и 39.

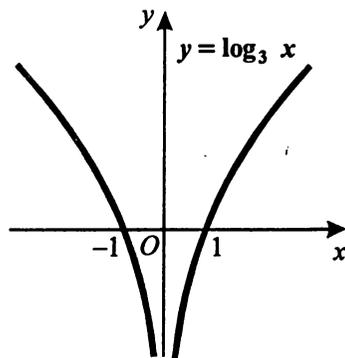


Рис. 38

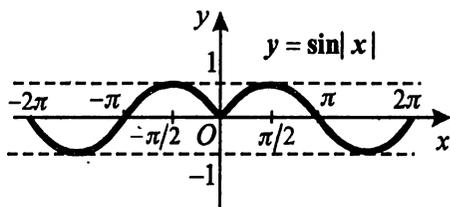


Рис. 39

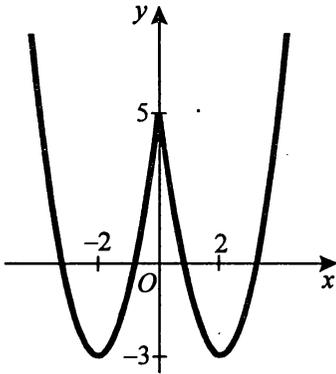


Рис. 40

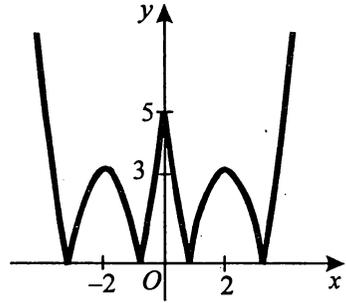


Рис. 41

Иногда правила 7 и 8 приходится применять одновременно, т. е. строить графики функций вида $y = |f(|x|)|$.

◆ **Пример 12.** Построить график функции $y = |2x^2 - 8|x| + 5|$.

График функции $y = 2x^2 - 8x + 5$ уже построен (см. рис. 33). Замечая, что $x^2 = |x|^2$, строим график функции $y = 2x^2 - 8|x| + 5$ по правилу 8. Строим часть параболы $y = 2x^2 - 8x + 5$ при $x \geq 0$ и отражаем ее зеркально относительно оси Oy (рис. 40). Согласно правилу 7 построим график модуля (рис. 41).

В следующих примерах графики функций будем строить, используя различные правила, не указывая конкретно, какие.

◆ **Примеры 13.** Построить график функции $y = \left| \frac{x+5}{x+3} \right|$.

Преобразуем данную дробно-линейную функцию, выделяя целую часть, к виду $y = \left| 1 + \frac{2}{x+3} \right|$ и построим график в следующем порядке:

- 1) график функции $y = 1/x$ считаем известным; 2) строим график $y = \frac{1}{x+3}$; 3) строим график $y = \frac{2}{x+3}$; 4) строим график $y = 1 + \frac{2}{x+3}$;
- 5) строим график $y = \left| 1 + \frac{2}{x+3} \right|$ (рис. 42).

Заметим, что строить промежуточные графики можно как на одном рисунке, так и на разных. В данном случае для наглядности это следует выполнить на разных рисунках (сделайте это самостоятельно).

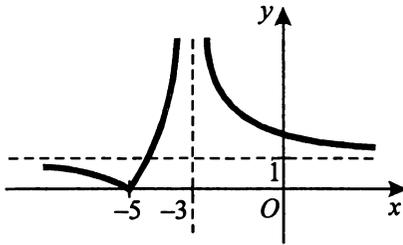


Рис. 42

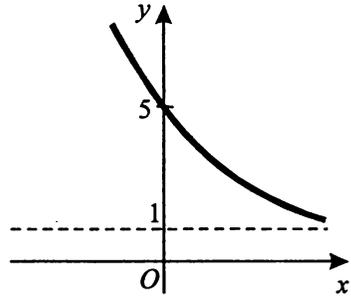


Рис. 43

◆ **Пример 14.** Построить график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} + 1$.

Представим функцию в виде $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{3(x-1/3)} + 1$ и построение графика проведем в таком порядке: 1) график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ считаем известным; 2) строим график $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$; 3) строим график $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3(x-1/3)}$; 4) строим график $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3(x-1/3)} + 1$ (рис. 43).

◆ **Пример 15.** Построить график функции $y = -\arctg(4x - 1)$.

Представим функцию в виде $y = -\arctg(4x - 1) = -\arctg 4\left(x - \frac{1}{4}\right)$ и построим ее график в следующем порядке: 1) график функции $y = \arctg x$ считаем известным; 2) строим график функции $y = \arctg 4x$; 3) строим график $y = \arctg 4\left(x - \frac{1}{4}\right)$; 4) строим график $y = -\arctg 4\left(x - \frac{1}{4}\right)$ (рис. 44).

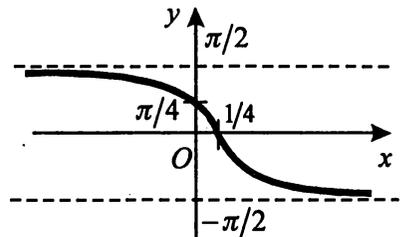


Рис. 44

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = 1 + \frac{1}{x+2}$. 2. $y = \frac{1}{x+3} - 1$. 3. $y = \frac{4x+7}{2x-5}$.
4. $y = \left| \frac{4-x}{5+2x} \right|$. 5. $y = 3^{x-2}$. 6. $y = (0,25)^{x+3}$.
7. $y = -2^{2x-1}$. 8. $y = -(0,5)^{x+1} + 1$. 9. $y = 2^{x+2}$.
10. $y = -\arcsin \frac{x+2}{3}$. 11. $y = 2 \operatorname{arctg}(2x-1)$. 12. $y = 3 \operatorname{arctg}(3x+1)$.
13. $y = 2 \arccos \frac{1-x}{2}$. 14. $y = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{x+2}{2}$.

Рассмотрим теперь правила сложения, умножения и деления графиков.

Даны графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Построим график функции $y = f(x) + g(x)$ ¹⁾.

Правило 9. Чтобы получить график функции $y = f(x) + g(x)$ из графиков функций y_1 и y_2 , нужно сложить соответствующие значения ординат графиков функций y_1 и y_2 .

◆ **Пример 16.** Используя правило 9, построить график функции

$$y = x + \sin x.$$

Функция y определена на всей числовой прямой. Ее график получаем графическим сложением соответствующих значений ординат y_1 и y_2 : $y = y_1 + y_2$.

Строим графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ (штриховые линии на рис. 45). В точках $x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots$ имеем $y_2 = 0$, $y_1 = x$ и $y = y_1 + 0 = x$, т. е. в этих точках график функции проходит через прямую $y_1 = x$. В точках $x = \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; \dots$ имеем $y_2 = \pm 1$, $y_1 = x$ и $y = x \pm 1$, т. е. в этих точках к ординате $y_1 = x$ прибавляем $+1$ (соответственно -1). Отмечая найденные точки и соединяя их плавной кривой, получаем график искомой функции (сплошная линия на рис. 45).

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = |x| + x$. 2. $y = 3^x + 3^{-x}$. 3. $y = \sin x + |\sin x|$.
4. $y = x^2 + \frac{1}{x}$. 5. $y = |x| + \frac{1}{x}$. 6. $y = x + \cos x$.

¹⁾ Разность всегда можно свести к сумме: $y = f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$.

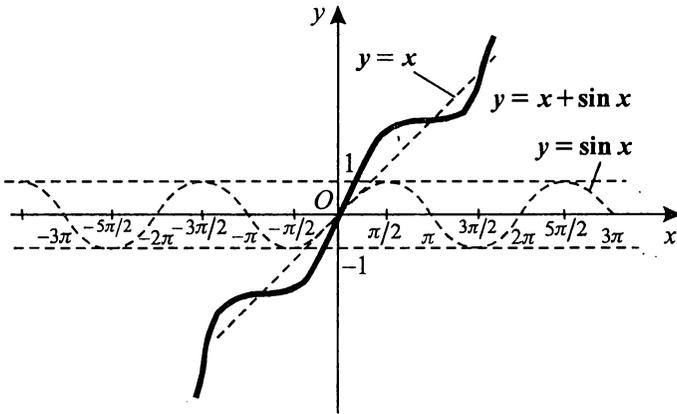


Рис. 45

Даны графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Построим график функции $y = f(x) \cdot g(x)$.

Правило 10. Чтобы получить график функции $y = f(x) \cdot g(x)$ из графиков функций y_1 и y_2 , надо умножить соответствующие значения ординат графиков функций y_1 и y_2 .

◆ **Пример 17.** Используя правило 10, построить график функции

$$y = x \cdot \sin x.$$

Функция y определена на всей числовой прямой. Так как функции $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ нечетные, то функция y , как произведение нечетных функций, четная, следовательно, построение будем производить при $x \geq 0$.

Строим графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$. График функции y получим умножением соответствующих ординат y_1 и y_2 : $y = y_1 \cdot y_2$. В точках $x = \pi$; 2π ; ... имеем $y_2 = 0$ и $y = y_1 \cdot y_2 = 0$, а в точках $x = \pi/2$; $3\pi/2$; ... $y_2 = \pm 1$ и $y = y_1 \cdot (\pm 1) = \pm x$, т. е.

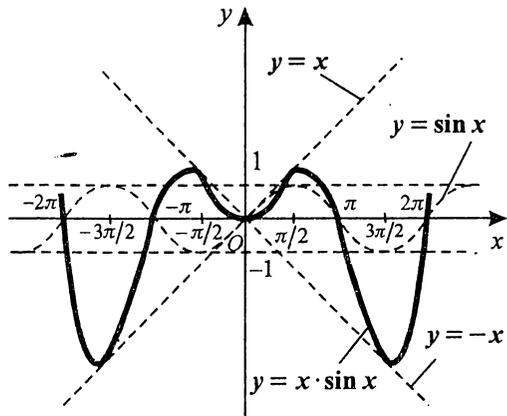


Рис. 46

соответствующие точки графика функции y лежат на прямых $y_1 = x$ и $y_2 = -x$ и график «колеблется» между этими прямыми при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, для построения данного графика целесообразно построить график вспомогательной функции $y_3 = -x$.

При $x \rightarrow 0+$ (т. е. справа) функции $\sin x$ и x эквивалентны ($\sin x \sim x$), поэтому $y = y_1 \cdot y_2 = x \cdot x = x^2$. Построив часть графика при $x \geq 0$ и отразив ее относительно оси Oy , получаем искомый график (рис. 46).

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = |x| \sin x$. 2. $y = x \cdot |x|$. 3. $y = x |\sin x|$. 4. $y = x(x^2 - 1)$.

Даны графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Построим график функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Правило 11. Чтобы получить график функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ из графиков функций y_1 и y_2 , нужно разделить соответствующие значения ординат графиков функций y_1 и y_2 в точках, где $y_2 \neq 0$.

◆ **Пример 18.** Используя правило 11, построить график функции

$$y = \frac{|x-1|}{x}.$$

Функция y определена по всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$.

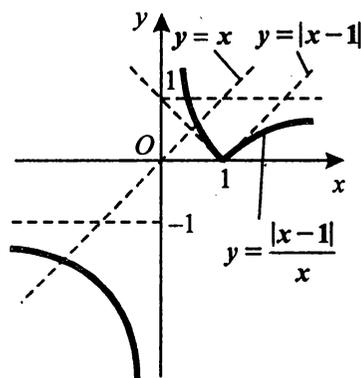


Рис. 47

Строим график функций $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = x$ (рис. 47). График функции y получим делением соответствующих значений ординат графиков функций y_1 и y_2 во всех точках, за исключением $x = 0$.

Из рисунка видно, что при $x \rightarrow 0-$ (т. е. слева) $y_1 \rightarrow 1$, $y_2 \rightarrow 0$ и $y = y_1/y_2 \rightarrow -\infty$, а при $x \rightarrow 0+$ (т. е. справа) $y_1 \rightarrow 1$, $y_2 \rightarrow 0$ и $y = y_1/y_2 \rightarrow +\infty$. Таким образом, прямая $x = 0$ является асимптотой¹⁾ графика функции y .

¹⁾ При исследовании поведения функции часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*.

В точке $x=1$ имеем $y_1=0$, $y_2=1$ и $y=y_1/y_2=0$.

При $x \rightarrow +\infty$ получаем $y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$, поэтому прямая $y=1$ является асимптотой правой ветви графика функции y , а при $x \rightarrow -\infty$ имеем $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow -1$, поэтому прямая $y=-1$ является асимптотой левой ветви графика функции y . Асимптоты будем изображать штриховой линией.

Таким образом, график искомой функции состоит из двух ветвей, изображенных на рис. 47 сплошной линией.

График данной функции может быть построен и другим способом.

Функцию $y = \frac{|x-1|}{x}$ можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{при } x-1 \geq 0, \\ -\frac{x-1}{x} & \text{при } x-1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{при } x \geq 1, \\ \frac{1-x}{x} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Построив отдельно дробно-линейные функции $y = \frac{1-x}{x}$ и $y = \frac{x-1}{x}$ и сохраняя только те участки, которые соответствуют указанным промежуткам, получим искомый график. (Сделайте это самостоятельно.)

• **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = \frac{x}{|x-1|}$.

2. $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$.

3. $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$.

4. $y = \frac{1}{\arcsin x}$.

5. $y = \frac{1}{3^x + 3^{-x}}$.

6. $y = \frac{1}{4^{3x-1} + 2}$.

(Указание к упражнениям 4—6. Обозначить знаменатель через $y_1(x)$, построить сначала график функции $y_1(x)$, а затем график функции $y = \frac{1}{y_1(x)}$.)

Осталось рассмотреть правило построения графиков сложных функций. Понятие сложной функции приведено в § 9.

Дан график функции $u = \varphi(x)$. Построим график функции $y = f[\varphi(x)]$.

Правило 12. Чтобы построить график функции $y = f[\varphi(x)]$, надо сначала построить график функции $u = \varphi(x)$, а затем, зная свойства функции $y = f(u)$, построить график сложной функции

$$y = f[\varphi(x)].$$

◆ **Пример 19.** Используя правило 12, построим график функции $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Функция y определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = -1$. Сначала строим график функции $u = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ (рис. 48, а), а затем, используя свойства показательной функции, построим график функции $y = 2^u = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Если $x \rightarrow -1-$, то $u \rightarrow +\infty$, $y = 2^u \rightarrow +\infty$.

Если $x \rightarrow -1+$, то $u \rightarrow -\infty$, $y = 2^u \rightarrow 0$.

Если $x \rightarrow -\infty$, то $u \rightarrow 1$, $y = 2^u \rightarrow 2$.

Если $x \rightarrow +\infty$, то $u \rightarrow 1$, $y = 2^u \rightarrow 2$.

Таким образом, прямые $x = -1$ и $y = 2$ являются асимптотами графика функции y . В точке $x = 1$ имеем $u = 0$, $y = 2^0 = 1$.

На основании полученных данных строим искомый график (рис. 48, б); стрелка изображена для того, чтобы показать, что точка $(-1; 0)$ графику не принадлежит.

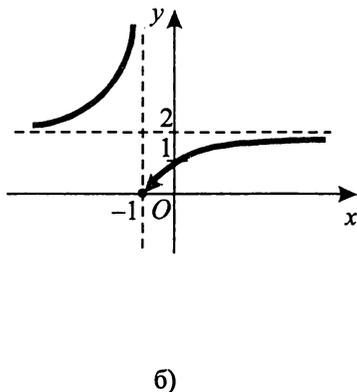
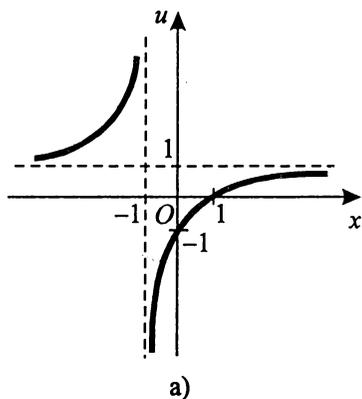
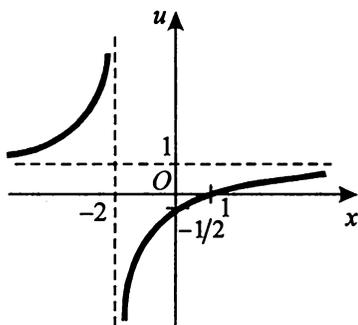
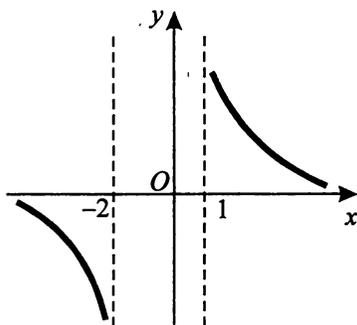


Рис. 48



а)



б)

Рис. 49

◆ **Пример 20.** Используя правило 12, построить график функции

$$y = \log_{1/2} \frac{x-1}{x+2}.$$

Строим сначала график функции $u = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ (рис. 49, а), а затем график функции $y = \log_{1/2} u = \log_{1/2} \frac{x-1}{x+2}$. По определению, логарифмическая функция $y = \log_{1/2} u$ определена лишь при тех значениях x , для которых $u > 0$, т.е. $\frac{x-1}{x+2} > 0$ для x , удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < -2$ и $1 < x < +\infty$, которые являются областью определения функции $y = \log_{1/2} \frac{x-1}{x+2}$.

Если $x \rightarrow -\infty$, то $u \rightarrow 1$, $y = \log_{1/2} u \rightarrow 0$.

Если $x \rightarrow -2$, то $u \rightarrow +\infty$, $y = \log_{1/2} u \rightarrow -\infty$.

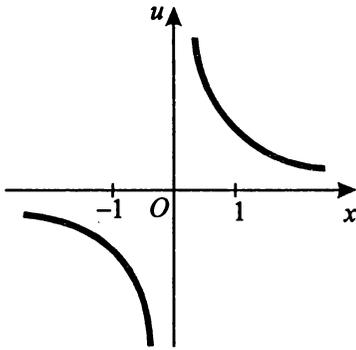
Если $x \rightarrow +\infty$, то $u \rightarrow 1$, $y = \log_{1/2} u \rightarrow 0$.

Если $x \rightarrow 1+$, то $u \rightarrow 0$, $y = \log_{1/2} u \rightarrow +\infty$.

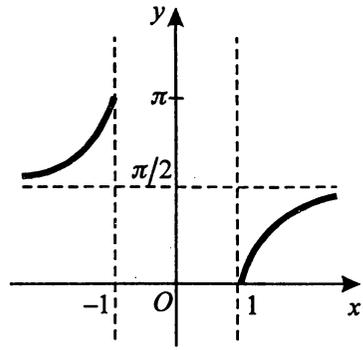
Таким образом, прямые $x = -2$, $x = 1$ и $y = 0$ являются асимптотами графика функции y . На основании полученных данных строим искомый график (рис. 49, б).

◆ **Пример 21.** Используя правило 12, построить график функции

$$y = \arccos(1/x).$$



а)



б)

Рис. 50

Как и ранее, сначала строим график функции $u = 1/x$ (рис. 50, а), а затем график функции $y = \arccos u = \arccos(1/x)$. По определению, функция $y = \arccos u$ определена лишь при тех x , для которых $-1 \leq u \leq 1$, т. е. для x , удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq 1/x \leq 1$. Значит, областью определения функции $y = \arccos(1/x)$ являются два промежутка: $-\infty < x \leq -1$ и $1 \leq x < +\infty$.

Если $x = -1$, то $u = -1$, $y = \arccos(-1) = \pi$.

Если $x = +1$, то $u = +1$, $y = \arccos 1 = 0$.

Если $x \rightarrow -\infty$, то $u \rightarrow 0$, $y = \arccos u \rightarrow \pi/2$.

Если $x \rightarrow +\infty$, то $u \rightarrow 0$, $y = \arccos u \rightarrow \pi/2$.

Таким образом, прямая $y = \pi/2$ является асимптотой графика. На основании полученных данных строим искомый график (рис. 50, б).

● **Упражнения.** Постройте графики функций:

1. $y = 2^{|x|}$.
2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. (Отв. См. рис. 51).
3. $y = 2^{1/x}$.

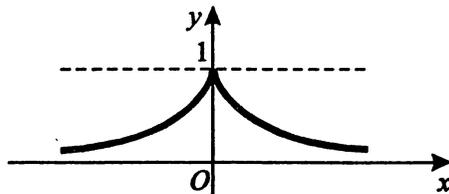


Рис. 51

4. $y = (1/2)^{-1/x^2}$. 5. $y = 1 + 3^{x-1}$. 6. $y = 2^{x^2-2x}$.
7. $y = 2^{\lg x}$. 8. $y = 2^{\sin x}$. 9. $y = 2^{x^2-4x+5}$.
10. $y = \log_{1/2}(x-x^2)$. 11. $y = \log_2 \frac{x+4}{2-x}$. 12. $y = \log_2 |\sin x|$.
13. $y = \log_{1/2} \cos x$. 14. $y = \log_{1/2} |x^2-3x+2|$. 15. $y = \log_2 (\sqrt[3]{x+1}+1)$.
16. $y = \log_{1/2} \frac{2|x|-1}{|x|-2}$. (Отв. См. рис. 52). 17. $y = \log_4 |x+2|$.
18. $y = |\log_4 |x+2||$. 19. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-1}{x+1}$. 20. $y = -2 \arctg \frac{x}{2-x}$.
21. $y = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}$. 22. $y = \frac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$. (Отв. См. рис. 53. У к а з а н и е.

Числитель и знаменатель дроби предварительно разделить на $2^{1/x}$.)

В заключение отметим, что умение строить графики функций, заданных формулами, имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Изучение функций гораздо проще и нагляднее, если оно сопровождается рассмотрением графиков этих функций. Вот почему инженер или научный работник, получив интересующую его функцию в виде формулы, всегда, когда надо выяснить общий характер поведения функции, ее особенности, начинает строить эскиз графика этой функции.

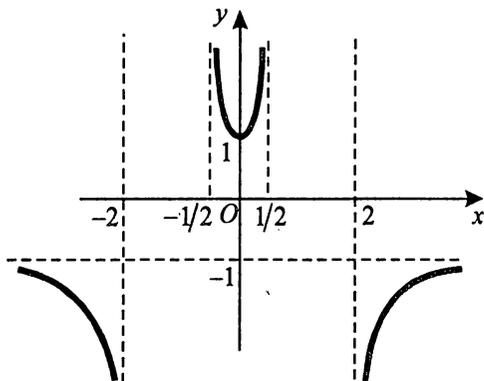


Рис. 52

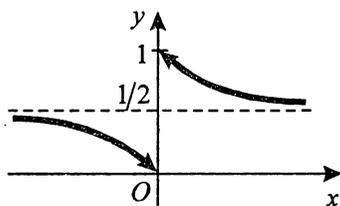


Рис. 53

Вопросы для самопроверки

1. Опишите этапы построения графика функции $y = bf(kx + a) + C$, где a, b, k, C — некоторые числа, если известен способ построения графика функции $y = f(x)$.
2. Свойства какой функции используются при построении графика сложной функции $y = f[\varphi(x)]$. Приведите примеры.

§ 11. Контрольные задачи

- 1.1. Решите уравнение $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$.
- 1.2. Решите уравнение $|\sin x| - \sin x = 2$.
- 1.3. Решите уравнение $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$.
- 1.4. Решите уравнения, раскрыв модули:
1) $|x + 4| = |x - 4|$; 2) $|x - 1| + |1 - 2x| = 2|x|$; 3) $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$.
- 1.5. Решите неравенство $|x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$.
- 1.6. Решите неравенство $|x - 3| + |x + 3| > 8$, раскрыв модули.
- 1.7. Докажите методом математической индукции, что $4^n > n^2$ для любого натурального n .
- 1.8. Докажите методом математической индукции, что $n! > 2^n$ для $n > 3$.
- 1.9. Докажите методом математической индукции неравенства
$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$
 для $n > 1$.
- 1.10. Найдите сумму $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$.
- 1.11. Найдите сумму $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.

Глава 2. Дифференцирование

Операция (действие) дифференцирования — основная в математике.

Но перед тем как перейти к ее изучению, необходимо предварительно познакомиться с понятиями предела, непрерывности и производной функции.

§ 1. Предел функции

1. Определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X ¹⁾ и пусть точка x_0 принадлежит X или x_0 не принадлежит X .

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ ²⁾ существует число $\delta > 0$ ³⁾ такое, что для всех x , принадлежащих X , $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символически это записывается так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ⁴⁾.

В определении предела функции следует обратить внимание на два существенных момента:

1. Число A называется пределом функции, если выполнение неравенства $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число, а δ соответствующим образом подобрано.

2. Для существования предела функции в точке x_0 вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке x_0 . Для того чтобы функция $f(x)$ стремилась к пределу при $x \rightarrow x_0$, необходимо

¹⁾ Напомним, что здесь X может быть любым промежутком вида $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$.

²⁾ ε — греческая буква «эпсилон».

³⁾ δ — греческая буква «дзельта».

⁴⁾ Читается: «предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 , равен A ».

лишь, чтобы в области ее определения X были точки, как угодно близкие к x_0 и отличные от x_0 .

- ◆ **Пример 1.** Используя определение, доказать, что функция $f(x) = C$ (C — некоторое число) в точке $x = x_0$ (x_0 — любое число) имеет предел, равный C , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

Решение. В данном примере $f(x) = C$, $A = C$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда для любого числа $\delta > 0$ выполняется требуемое неравенство $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$; следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

- ◆ **Пример 2.** Используя определение, доказать, что $f(x) = x$ в точке $x = x_0$ имеет предел, равный x_0 , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Решение. В данном примере $f(x) = x$, $A = x_0$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда если взять $\delta = \varepsilon$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется требуемое неравенство $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$; следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

- ◆ **Пример 3.** Используя определение, доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ в точке $x = 1$ имеет предел, равный единице, т. е. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$.

Решение. В данном примере $f(x) = 3x - 2$, $A = 1$ и $x_0 = 1$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x - 1)| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда видно, что если взять $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется требуемое неравенство $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$. В частности, если $\varepsilon = 1$, то $\delta \leq \frac{1}{3}$, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\delta \leq \frac{1}{6}$ и т. д.

◆ **Пример 4.** Используя определение, доказать, что функция $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

в точке $x = 1$ имеет предел, равный двум, т. е. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Решение. В данном примере $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $A = 2$ и $x_0 = 1$. Воспользуемся тем, что при рассмотрении предела функции в точке $x = 1$ ее аргумент не принимает значения, равного 1. Имеем

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| \text{ при } x \neq 1.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon, \text{ если } |x - 1| < \varepsilon \text{ и } x \neq 1.$$

Отсюда видно, что если взять $\delta = \varepsilon$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$ при $x \neq 1$, выполняется требуемое неравенство

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Заметим, что находить предел функции, используя только определение, довольно сложно. На практике обычно пользуются теоремами о пределах, которые будут приведены в следующем пункте.

З а м е ч а н и е. Неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ¹⁾.

Интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется δ -окрестностью точки x_0 . Пользуясь этим названием, определение предела функции можно сформулировать и так: число A называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (рис. 54).

¹⁾ См. теорему 1.1.

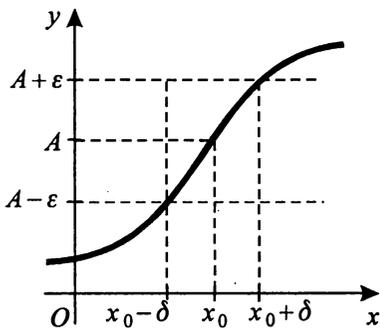


Рис. 54

На рис. 54 видно, что при приближении точки x к точке x_0 значения функции приближаются к числу A . Естественно считать, что число A — предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 .

• **Упражнения.** Используя определение, доказать, что:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. 5. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5) = 11$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$. 7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$. 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$.

9. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$. 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

2. Теоремы о пределах функций.

Теорема 2.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C . Тогда функция $f(x) \pm g(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный $B \pm C$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = B \pm C.$$

Теорема 2.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C . Тогда функция $f(x) \cdot g(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный $B \cdot C$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = B \cdot C.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot g(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

где $f(x) = C$ — постоянный множитель.

В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

так как $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ (см. пример 1 п. 1.).

Теорема 2.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C . Тогда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $C \neq 0$) имеет в точке x_0 предел, равный $\frac{B}{C}$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{C}.$$

З а м е ч а н и е. Теоремы 2.1—2.3 верны также и в случае, когда x_0 является одним из символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

◆ **Пример 5.** Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5)$.

Р е ш е н и е. На основании теоремы 2.1 и теоремы 2.2 (предел суммы и произведения) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 3 \cdot 1 + 1 + 5 = 9, \end{aligned}$$

так как $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ (см. пример 2 п. 1).

◆ **Пример 6.** Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Р е ш е н и е. Предел числителя

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 3,$$

а предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 \cdot 1 - 1 + 1 = 1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то, применяя теорему 2.3 (предел частного), окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1)} = \frac{3}{1} = 3.$$

◆ **Пример 7.** Найти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$.

Р е ш е н и е. Непосредственно теорему 2.3 (предел частного) применить нельзя, так как предел знаменателя при $x \rightarrow -2$ равен нулю. Здесь и

предел числителя при $x \rightarrow -2$ также равен нулю. Следовательно, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность.

Для этого разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $x + 2$, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Это можно сделать, так как в определении предела функции при $x \rightarrow -2$ значение функции в точке $x = -2$ не входит в множество значений функции, поскольку $x \neq -2$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+4}{x^2 - 2x + 4}.$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрыта. Применяя теорему 2.3, окончательно находим

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4)} = \frac{-2+4}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

● **Упражнения.** Найдите:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x + 1}{x^6 + x^3 + 1}$. | 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$. | 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$. |
| 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$. | 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - 2x + 1)$. |

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение предела функции.
2. Назовите два существенных момента в определении предела функции.
3. Докажите, пользуясь определением предела функции, что в любой точке $x = x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$
4. Докажите, пользуясь определением предела функции, что $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.
Найдите такое δ , чтобы для $|x - 2| < \delta$ выполнялось условие $|f(x) - 3| = |(2x - 1) - 3| < 0,01$. (Отв. $\delta = 0,005$.)
5. Сформулируйте теоремы 2.1—2.3.
6. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} [C \cdot g(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (C — постоянный множитель).

§ 2. Непрерывность функции

1. Определение непрерывности функции. Пусть на некотором промежутке X определена функция $f(x)$ и точка x_0 принадлежит этому промежутку.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Согласно определению для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0 , требуется выполнение следующих условий.

1. Точка x_0 должна принадлежать области определения функции. Заметим, что этого не требовалось, когда мы рассматривали предел функции $f(x)$ в точке x_0 . В этом заключено отличие понятия непрерывности функции от понятия ее предела.

2. Функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x \rightarrow x_0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

3. Этот предел A должен быть равен значению функции в точке $x = x_0$, т. е. должно выполняться равенство

$$A = f(x_0).$$

Если же равенство (1) не выполняется, то функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке x_0 , а сама точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

◆ **Пример 1.** Доказать непрерывность функции $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ в точке $x = 1$.

Решение. На основании известных теорем о пределах функции найдем предел данной функции при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Затем вычислим значение функции в точке $x = 1$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что предел функции и ее значение в точке $x = 1$ равны, т. е. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Согласно определению, это означает, что данная функция непрерывна в точке $x = 1$. Аналогично

можно показать, что данная функция непрерывна в любой точке x_0 числовой прямой.

- **Упражнение.** Докажите, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна в любой точке x_0 числовой прямой.

По аналогии с определением предела функции, приведенное определение непрерывности функции можно перефразировать следующим образом: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (Мы не пишем $x \neq x_0$, так как в рассматриваемом случае x_0 принадлежит X .)

Перенесем в равенстве (1) $f(x_0)$ в левую часть и внесем $f(x_0)$ под знак предела. Так как условия $x \rightarrow x_0$ и $(x - x_0) \rightarrow 0$ равносильны, то получаем

$$\lim_{(x-x_0) \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \quad (2)$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается, как правило, Δx (читается: «дельта икс»), а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции* в точке x_0 , вызванным приращением аргумента Δx , и обозначается Δy . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

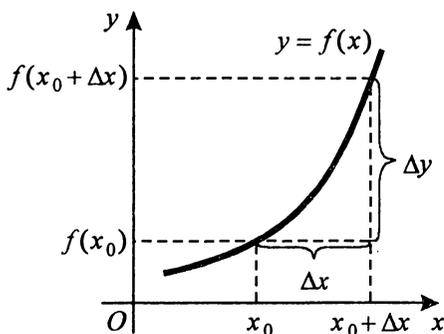


Рис. 55

Соотношение (3) является еще одним определением непрерывности функции, которое можно сформулировать так: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если ее приращение в этой точке Δy стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

При некоторых обстоятельствах наряду с формулой (1) удобно пользоваться и формулой (3).

Приращение Δy есть величина, на которую изменилось значение функции $f(x)$ при изменении значения аргумента от x_0 до $x_0 + \Delta x$ (рис. 55).

Равенство (2) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) является еще одним определением непрерывности функции, которое можно

- ◆ **Пример 2.** Найти приращение Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.

Решение. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$, а так как $f(x) = x^2$, то $f(x_2) = f(4) = 4^2 = 16$, $f(x_1) = f(3) = 3^2 = 9$ и приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7$.

- **Упражнение.** Найдите приращение Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к новому значению $x_2 = 3$. (Отв. $\Delta y = 19$.)

- ◆ **Пример 3.** Пользуясь последним определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в любой точке x_0 числовой прямой.

Решение. Придавая аргументу x в точке x_0 приращение Δx , найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 5(x_0 + \Delta x)^2 - 6(x_0 + \Delta x) + 2 - 5x_0^2 + 6x_0 - 2 = \\ &= (10x_0 - 6)\Delta x + 5(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Найдем предел Δy при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(10x_0 - 6)\Delta x + 5(\Delta x)^2] = 0$$

в любой точке x_0 , что и доказывает непрерывность заданной функции на всей числовой прямой.

- **Упражнения.** Докажите непрерывность функции в любой точке x_0 числовой прямой:

1. $f(x) = x$;
2. $f(x) = x^2 + 3x + 3$;
3. $f(x) = x^3 - 2x + 4$;
4. $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$.

2. Непрерывность элементарных функций.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией этих функций, составляют класс *элементарных функций*.

Примерами элементарных функций являются $f(x) = |x|$ ($|x| = \sqrt{x^2}$);

$f(x) = \lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \sin 3x$; $f(x) = \ln |\sin 3x| - e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ и т. д.

Теорема 2.4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x_0) \neq 0$).

Одним из важных свойств элементарных функций является их непрерывность в каждой точке области определения. К сожалению, мы не можем на этом останавливаться. Отметим лишь, это свойство открывает широкие возможности для вычислений пределов элементарных функций.

◆ **Пример 4.** Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$.

Решение. Так как в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функции 1 , $\sin x$, $\cos 2x$ непрерывны, то, по теореме 2.4, функция $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{2}$, т. е. предел функции и ее значение в этой точке равны, тогда, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x} = \frac{1 + \sin(\pi/2)}{1 - \cos(2\pi/2)} = \frac{1 + 1}{1 - (-1)} = 1.$$

◆ **Пример 5.** Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, т. е. не является непрерывной в этой точке. Поэтому сразу переходить к пределу, как в предыдущем примере, нельзя. Для нахождения предела надо функцию $f(x)$ тождественно преобразовать так, чтобы она при $x \neq 0$ совпала с некоторой функцией $F(x)$, непрерывной в точке $x = 0$, т. е. найти такую непрерывную функцию $F(x)$, чтобы $f(x) = F(x)$ при $x \neq 0$ или $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+1} + 1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = F(x).$$

Таким образом, $f(x) = F(x)$ при $x \neq 0$. Но функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, т. е. предел функции и ее значение в этой точке равны, поэтому, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

◆ **Пример 6.** Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$ не определена в точке $x = \pi/4$. Для нахождения предела преобразуем дробь:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} &= \frac{\sin 2x - (1 + \cos 2x)}{\sin x - \cos x} = \frac{2\sin x \cos x - 2\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \\ &= \frac{2\cos x(\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = 2\cos x. \end{aligned}$$

При $x \neq \pi/4$ имеем

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = 2\cos x.$$

Но функция $2\cos x$ непрерывна в точке $x = \pi/4$. Поэтому, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} 2\cos x = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/4} \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

● **Упражнения.** Найдите:

- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)$. (Омв. - 1.)
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. (Омв. 10.)
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 1}{3x^2 + x + 2}$. (Омв. $\frac{2}{3}$.)
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. (Омв. 1.)
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$. (Омв. $\frac{1}{5}$.)
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}$. (Омв. $\frac{1}{2}$.)
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$. (Омв. 1.)
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$. (Омв. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.)

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}. \text{ (Омв. } -8.)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}. \text{ (Омв. } \frac{1}{6}.)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}. \text{ (Омв. } -12.)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}. \text{ (Омв. } -1.)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}. \text{ (Омв. } 1.)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}. \text{ (Омв. } \frac{2}{3}.)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}. \text{ (Омв. } \frac{1}{2}.)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}. \text{ (Омв. } \frac{2}{3}.)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2+4} \right). \text{ (Омв. } \frac{1}{4}.)$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right). \text{ (Омв. } -\frac{1}{2}.)$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} (2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x). \text{ (Омв. } 0.)$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение непрерывности функции.
2. Сформулируйте определение непрерывности функции «на языке $\varepsilon - \delta$ ». В чем различие между понятиями непрерывности функции и пределом функции?
3. Что называется приращением аргумента x и приращением функции $f(x)$ в точке x_0 ? Раскройте геометрический смысл этих приращений и сформулируйте соответствующее определение непрерывности функции.
4. Исследуйте на непрерывность функцию $f(x) = x^2$ в произвольной точке x_0 .
5. Какие функции называются элементарными?
6. Каким важным свойством обладают элементарные функции?

§ 3. Производная функции

1. Определение производной. Пусть на некотором промежутке X определена функция $f(x)$. Возьмем любую точку x_0 из X и придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ также будет принадлежать X . Функция получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).

Символически это записывается так:

$$f'(x_0)^{1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

или, вспоминая, что $\Delta x = x - x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Из определения производной видно, что x_0 считается постоянным и рассматривается предел отношения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

при x , стремящемся к x_0 , а из определения предела функции следует, что функция может не быть определенной в точке x_0 (при $x \rightarrow x_0$ $x \neq x_0$). Поэтому, чтобы предел отношения (1) существовал необходимо, чтобы отношение (1) было определено для всех $x \neq x_0$, так как при $\Delta x = 0$

($x = x_0$) выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ теряет смысл и понятие предела нельзя применить к определению производной. Если же предел отношения (1) не существует, то говорят, что данная функция в точке x_0 производной не имеет.

Докажем теперь важную теорему, устанавливающую связь между понятиями производной и непрерывностью функции.

Теорема 2.5. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

откуда и следует (см. формулу (3) из § 2) непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 , что и требовалось доказать.

Обратная теорема неверна: функция может быть непрерывной в точке x_0 и тем не менее в этой точке не иметь производной.

Например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой пря-

¹⁾ Читается: «эф штрих от x_0 ».

мой, но в точке $x = 0$ не имеет производной. В самом деле, в точке $x = 0$ приращению аргумента Δx соответствует приращение функции

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Это значит, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ не имеет производной.

Функция, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* на указанном промежутке, а операция нахождения производных называется *дифференцированием*.

Чтобы вычислить производную функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 , исходя из определения, необходимо:

1) значению аргумента x в точке x_0 дать некоторое приращение Δx и найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) составить отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3) вычислить предел отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, если он существует.

◆ **Пример 1.** Используя определение производной, найти производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$.

Решение. Придавая аргументу x в точке x_0 приращение Δx , найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ &= x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 равна числу $2x_0$, что в принятых обозначениях можно записать так: $f'(x_0) = 2x_0$.

● **Упражнения.** Используя определения производной, найдите производные функций в точке $x = x_0$:

1. $f(x) = 5x^2$. (Отв. $10x_0$.) 2. $f(x) = x^3$. (Отв. $3x_0^2$.)

3. $f(x) = \sqrt{x}$. (Отв. $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.) 4. $f(x) = \frac{1}{x}$. (Отв. $-\frac{1}{x^2}$.)

5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. (Отв. $-\frac{2}{x_0^3}$.) 6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. (Отв. $-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}$.)

7. $f(x) = \sin 2x$. (Отв. $2 \cos 2x_0$.) 8. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$. (Отв. $-\frac{\sin(x_0/2)}{2}$.)

9. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. (Отв. $-\frac{2}{(2x_0+1)^2}$.)

10. $f(x) = \sqrt{1+3x}$. (Отв. $\frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}$.)

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке x , принадлежащей X , то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x , также определенную на X .

2. Геометрический смысл производной. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) . Пусть, далее, точка M на графике функции соответствует некоторому значению аргумента x_0 , а точка P — значению $x_0 + \Delta x$, где Δx — приращение аргумента. Проведем через точки M и P прямую и назовем ее *секущей*. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью Ox (рис. 56). Очевидно, что этот угол зависит от Δx . *Касательной* S к графику функции $f(x)$ в точке M будем называть предельное положение секущей MP при неограниченном приближении точки P по графику к точке M (или, что то же самое, при $\Delta x \rightarrow 0$). Из рис. 56 следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{NP}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ секущая MP переходит в касательную, то

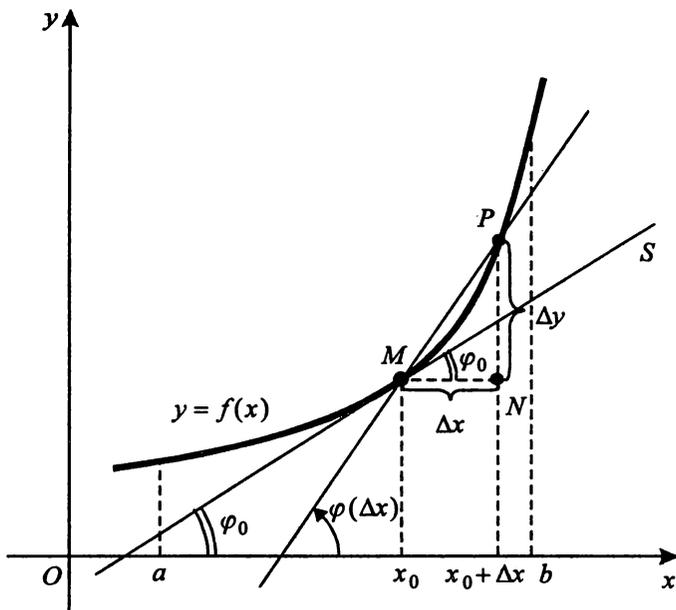


Рис. 56

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \operatorname{tg} \varphi_0,$$

где φ_0 — угол, который образует касательная с осью Ox . С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_0$. Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной ($k = \operatorname{tg} \varphi_0$) к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$.

◆ **Пример 2.** Найти угловой коэффициент касательной к параболе $f(x) = x^2$ в точке $M(1/2; 1)$ и угол между касательной в этой точке и осью Ox .

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $M(1/2; 1)$ равен значению производной этой функции в точке $x_0 = 1/2$, то задача и сводится к отысканию значения производной в этой точке.

Ранее было установлено (см. пример 1), что $f'(x_0) = (x^2)'|_{x=x_0} = 2x_0$.

Подставляя $1/2$ вместо x_0 , получаем $f'(1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$. Следовательно,

угловый коэффициент касательной равен 1, т. е. $k=1$ или $\operatorname{tg} \varphi_0=1$ (φ_0 — угол между касательной и осью Ox), откуда получаем искомый угол: $\varphi_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$.

Если в некоторой точке производная равна нулю ($k=0$), то касательная к графику функции в этой точке параллельна оси Ox , а если же производная обращается в бесконечность ($k=\infty$), то это значит, что касательная в этой точке параллельна оси Oy .

◆ **Пример 3.** Составить уравнение касательной к параболе $f(x) = x^2$ в точке $M(1/2; 1)$.

Решение. Чтобы составить искомое уравнение касательной, достаточно написать известное из аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$, с данным угловым коэффициентом k

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

и вместо k подставить значение производной функции $f'(x_0)$. Подставляя в уравнение координаты точки $M(1/2; 1)$ и значение производной функции $f'(x_0) = f'(1/2) = 1$ (см. пример 1), получим уравнение искомой касательной

$$y - 1 = 1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \text{или} \quad y = x + \frac{1}{2}.$$

● **Упражнение.** Составить уравнение касательной к параболе $f(x) = 4 - x^2$ в точке пересечения ее с осью Ox при $x > 0$. Построить параболу и касательную. (Отв. $y = -4x + 8$.)

◆ **Пример 4.** Составить уравнение касательной, проведенной из точки $M(1; -3)$ к параболе $f(x) = x^2$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $f(x) = x^2$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Так как $f(x_0) = x_0^2$, $f'(x_0) = 2x_0$ (см. пример 1) и эта прямая проходит через точку $(x; y) = (1; -3)$, то из (2) получаем

$$-3 - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0).$$

Из этого уравнения находим $x_0 = -1$ или $x_0 = 3$.

Если $x_0 = -1$, то $f(x_0) = x_0^2 = 1$, $f'(x_0) = 2x_0 = -2$ и уравнение касательной принимает вид $y - 1 = -2(x + 1)$, т. е. $y = -2x - 1$.

Если $x_0 = 3$, то $f(x_0) = 9$, $f'(x_0) = 6$ и уравнение касательной таково: $y = 6x - 9$.

Таким образом, через точку $M(1; -3)$ к данной параболе можно провести две касательные.

● **Упражнение.** Составить уравнения касательных к графику функции

$$f(x) = \sqrt{x}, \text{ проходящих через точку } (2; 3/2). \text{ (Отв. } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1.)$$

Отметим, что геометрический смысл производной играет важную роль в раскрытии многих понятий математического анализа и в решении ряда геометрических задач.

3. Физический смысл производной. Предположим, что функция $y = f(t)$ описывает закон движения материальной точки M по прямой линии, т. е. $y = f(t)$ — путь, пройденный точкой от начала движения за время t .

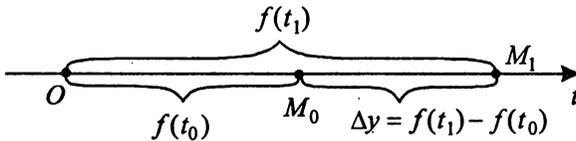


Рис. 57

Тогда за время t_0 пройден путь $y = f(t_0)$, а за время t_1 — путь $y = f(t_1)$. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ точка M пройдет отрезок пути $\Delta y = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ (рис. 57). Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ называется *средней скоростью движения* ($v_{\text{ср}}$) за время Δt , а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени t_0 ($v_{\text{мгн}}$).

- ◆ **Пример 5.** Найти среднюю и мгновенную скорость в момент времени t_0 точки, прямолинейное движение которой задано уравнением $y = \sqrt{t}$ (где y — путь, а t — время, $t \geq 0$).

Решение. За время t_0 точка пройдет путь $y = \sqrt{t_0}$, а за время t_1 — путь $y = \sqrt{t_1}$. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ точка пройдет отрезок пути $\Delta y = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_0} = \sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}$. Тогда средняя скорость движения точки на отрезке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t},$$

а мгновенная скорость движения в момент времени t_0

$$\begin{aligned} v_{\text{мгн}} &= y'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0})(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})}{\Delta t(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t_0 + \Delta t) - t_0}{\Delta t(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}. \end{aligned}$$

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость ни выражала функция $y = f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — средняя скорость изменения y относительно изменения x , а $y'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения y при некотором $x = x_0$.

- ◆ **Пример 6.** Найти скорость свободно падающего тела в пустоте в некоторый фиксированный момент времени t .

Решение. Из физики известно, что закон свободного падения тела в пустоте определяется формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, где g — постоянная величина.

Придадим некоторому значению t приращение Δt ; тогда пройденный путь s получит приращение

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}.$$

Средняя скорость падения тела на отрезке времени $[t; t + \Delta t]$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2gt \Delta t + g(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t + \Delta t),$$

а скорость падения тела в момент времени t

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2}g(2t + \Delta t) = gt.$$

Отсюда, в частности, следует, что скорость свободно падающего тела пропорциональна времени движения (падения).

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции $f(x)$ в точке x_0 . Какова роль понятия предела функции в определении производной?
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Дайте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.
4. Каков физический смысл производной?
5. Найдите скорость свободно падающего тела в пустоте в момент времени t .

Перед тем как перейти к вычислению производных отметим, что при выводе формул и практическом вычислении производных обычно пишут не x_0 , а просто x , но при этом x считают фиксированным.

§ 4. Вычисление производных

1. Правила дифференцирования.

Теорема 2.6. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке x_0 , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0 и справедливы следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

2. Формулы дифференцирования.

I. $(C)' = 0$.

II. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — любое число), в частности $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

IV. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

V. $(\sin x)' = \cos x$.

VI. $(\cos x)' = -\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. Производная сложной функции

Теорема 2.7. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0 , а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет производную в точке t_0 и имеет место следующая формула:

$$y'(t_0) = f'(x_0) \varphi'(t_0). \quad (1)$$

Формулы дифференцирования вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правилом дифференцирования сложной функции составляют основу дифференциального исчисления.

Из правил и формул дифференцирования можно сделать важный вывод: производная любой элементарной функции также функция элементарная. Таким образом, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

4. Вычисление производных постоянной функции, степенной функции, показатель которой является целым положительным числом, тригонометрических функций и логарифмической функции.

Предварительно покажем, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е. $(C \cdot u)' = C u'$. Действительно, если $v = C$ ($C = \text{const}$), то по формуле I и применяя теорему 2.6 к произведению $C \cdot u$, получим:

$$(C \cdot u)' = (C)'u + C u' = 0 \cdot u + C u' = C u',$$

что и требовалось показать.

- ◆ **Пример 1.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции

$$f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x.$$

Решение. Заданная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций. Производная от алгебраической суммы по теореме 2.6 равна сумме производных каждого слагаемого, следовательно, получим

$$f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x)',$$

но

$$(5)' = 0, (x^3)' = 3x^2, (3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x, (\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, (2 \operatorname{tg} x)' = 2(\operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\cos^2 x}, (3 \operatorname{ctg} x)' = 3(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{3}{\sin^2 x},$$

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x} \log_2 e, (3 \ln x)' = 3(\ln x)' = \frac{3}{x}.$$

$$\text{Итак, } f'(x) = 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x} \log_2 e + \frac{3}{x}.$$

- ◆ **Пример 2.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x) = x \cdot \sin x$.

Решение. Для нахождения производной от произведения x на $\sin x$ надо использовать (см. теорему 2.6) формулу

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Здесь $u = x$, $v = \sin x$. Тогда

$$f'(x) = (x \cdot \sin x)' = (x)' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

- ◆ **Пример 3.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Решение. Чтобы взять производную от дроби $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ надо использовать (см. теорему 2.6) формулу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

При решении этого примера будем делать подробные записи, а в дальнейшем от них откажемся. Надо научиться дифференцировать бегло, без промежуточных записей. Здесь $u = x^2 - 1$, $v = x^2 + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{[(x^2)' - (1)'](x^2+1) - (x^2-1)[(x^2)' + (1)']}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(2x-0)(x^2+1) - (x^2-1)(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

После очевидных упрощений окончательно получаем

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

● **Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = 4x^5 - 3 \sin x + 5 \operatorname{ctg} x$. (Омв. $20x^4 - 3 \cos x - \frac{5}{\sin^2 x}$.)

2. $f(x) = \log_2 x + 3 \log_3 x$. (Омв. $\frac{\ln 24}{x \ln 2 \ln 3}$.)

3. $f(x) = 4 \cos x - 2 \operatorname{tg} x + 3$. (Омв. $-4 \sin x - \frac{2}{\cos^2 x}$.)

4. $f(x) = 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$. (Омв. $\frac{5}{x} + 7 \sin x - 4 \operatorname{ctg} 2x$.)

5. $f(x) = x \cos x$. (Омв. $\cos x - x \sin x$.)

6. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$. (Омв. $x(\sin 2x + x) \sec^2 x$.)

7. $f(x) = x^2 \log_3 x$. (Омв. $x \frac{2 \ln x + 1}{\ln 3}$.)

8. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. (Омв. $-\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$.)

9. $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x$. (Омв. $\frac{\sin x - x^2 + x \cos x (\sin x - \ln x)}{x \sin^2 x}$.)

10. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$. (Омв. $-\frac{2 + \sin x}{(1 + 2 \sin x)^2}$.)

11. $f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$. (Омв. $\frac{(1 + x^2)(\sin x \cos x + x) - x^2 \sin 2x}{(1 + x^2)^2 \cos^2 x}$.)

5. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций.

◆ **Пример 4.** Используя правила и формулы дифференцирования, найти производную функции

$$f(x) = 5^x + \arcsin x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x .$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5^x + \arcsin x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x)' = \\ &= (5^x)' + (\arcsin x)' + 3(\arccos x)' + (\operatorname{arctg} x)' - 3(\operatorname{arcctg} x)' = \\ &= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} = \\ &= 5^x \ln 5 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2} . \end{aligned}$$

● **Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = \arcsin x + 6^x + 5 \arccos x$. (Отв. $6^x \ln 6 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$.)
2. $f(x) = x \arccos x$. (Отв. $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.)
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$. (Отв. $\frac{2}{1+x^2}$.)
4. $f(x) = 4 e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x$. (Отв. $4 e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)
5. $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. (Отв. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.)

6. Вычисление производной сложной функции. В теореме 2.7. рассматривалась сложная функция, где y зависела от t через промежуточную переменную x . Возможна и более сложная зависимость — с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается прежним.

Так, например, если $y = f(x)$, где $x = \varphi(u)$, а $u = \psi(v)$ и $v = \chi(t)$, то производную $y'(t)$ следует искать по формуле

$$y'(t) = y'(x) x'(u) u'(v) v'(t) . \quad (2)$$

Рассмотрим примеры дифференцирования сложной функции.

◆ **Пример 5.** Вычислить производную функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = e^u$, где $u = \operatorname{arctg} x$. Тогда, по формуле (2)

$$y'(x) = y'(u) u'(x) = e^u \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Заменяв u на $\operatorname{arctg} x$, окончательно получим

$$y'(x) = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

◆ **Пример 6.** Вычислить производную функции $y = \operatorname{tg}^2(x^2 + 1)$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u^2$, где $u = \operatorname{tg} v$, а $v = x^2 + 1$. Используя формулу (2), получим

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(u) u'(v) v'(x) = (u^2)' (\operatorname{tg} v)' (x^2 + 1)' = \\ &= 2u \sec^2 v \cdot 2x = 2 \operatorname{tg}(x^2 + 1) \sec^2(x^2 + 1) \cdot 2x = \\ &= 4x \operatorname{tg}(x^2 + 1) \sec^2(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Разумеется, нет необходимости в таких подробных записях. Обычно результат следует писать сразу, представляя последовательно в уме промежуточные аргументы.

Так, например, вычисление производной в последнем примере можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2 \operatorname{tg}(x^2 + 1) \frac{1}{\cos^2(x^2 + 1)} \cdot (x^2 + 1)' = \\ &= 2 \operatorname{tg}(x^2 + 1) \cdot \sec^2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x \operatorname{tg}(x^2 + 1) \sec^2(x^2 + 1). \end{aligned}$$

● **Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = \sin 3x$. (Отв. $3 \cos 3x$.)

2. $f(x) = \sin(x^2 + 5x + 2)$. (Отв. $(2x + 5) \cos(x^2 + 5x + 2)$.)

3. $f(x) = \sin^2 x$. (Отв. $\sin 2x$.)

4. $f(x) = \sin^3 x$. (Отв. $3 \sin^2 x \cos x$.)

5. $f(x) = \cos^{100} x$. (Отв. $-100 \sin x \cos^{99} x$.)

6. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 3)$. (Отв. $\frac{2x}{\cos^2(x^2 + 3)}$.)

7. $f(x) = \ln \sin x$. (Oms. $\operatorname{ctg} x$.)
8. $f(x) = \ln \operatorname{tg} 5x$. (Oms. $\frac{10}{\sin 10x}$.)
9. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$. (Oms. $e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x$.)
10. $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$. (Oms. $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.)
11. $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. (Oms. $\operatorname{arctg} x$.)
12. $f(x) = \sin^2 x^3$. (Oms. $3x^2 \sin 2x^3$.)
13. $f(x) = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$. (Oms. $\frac{5}{8} \operatorname{tg} 2x \cdot \sec^{10} 2x$.)
14. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. (Oms. $-\sin 4x$.)
15. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$. (Oms. $\frac{-2 \cos^2 x}{\sin^3 x}$.)
16. $f(x) = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2}$. (Oms. $3 \cdot 2^{3x} \ln 2 + 5x^4 - 2x e^{-x^2}$.)
17. $f(x) = x^2 e^{-x}$. (Oms. $x e^{-x}(2-x)$.)
18. $f(x) = (x+2) e^{-x^2}$. (Oms. $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$.)
19. $f(x) = e^{1/\cos x}$. (Oms. $e^{1/\cos x} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.)
20. $f(x) = e^{1/\ln x}$. (Oms. $\frac{-e^{1/\ln x}}{x \ln^2 x}$.)
21. $f(x) = 10^{3-\sin^3 2x}$. (Oms. $10^{3-\sin^3 2x} \ln 10 \cdot (-3 \sin 2x \sin 4x)$.)
22. $f(x) = \sin(2^x)$. (Oms. $2^x (\ln 2) \cos 2^x$.)
23. $f(x) = \arccos(1-2x)$. (Oms. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.)
24. $f(x) = \arcsin(e^{4x})$. (Oms. $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$.)
25. $f(x) = \operatorname{arctg} \ln(5x+3)$. (Oms. $\frac{5}{(5x+3)[1+\ln^2(5x+3)]}$.)
26. $f(x) = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$. (Oms. $\frac{2 \operatorname{arctg}(1/x)}{1+x^2}$.)

$$27. f(x) = \operatorname{tg} \sin \cos x. \text{ (Омв. } \frac{-\sin \cos(\cos x)}{\cos^2(\sin \cos x)} \text{.)}$$

$$28. f(x) = \ln^5 \sin x. \text{ (Омв. } 5 \operatorname{ctg} x \cdot \ln^4 \sin x \text{.)}$$

7. Понятие логарифмической производной функции. Вычислим производную функции $y = \ln|x|$ ($x \neq 0$). Так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, а

$(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$ (последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная функции выражается следующей формулой:

$$y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \quad (3)$$

Учитывая полученную формулу (3), вычислим производную сложной функции $y = \ln|u|$, где $u = f(x)$ — дифференцируемая функция. Имеем

$$y' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (4)$$

Производная от логарифма функции $(\ln|f(x)|)'$ и называется *логарифмической производной* функции $f(x)$. Для упрощения записи при логарифмическом дифференцировании знак модуля у функции $f(x)$ можно опустить.

В качестве примера вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где u и v — некоторые функции от x ($u > 0$), имеющие в данной точке производные $u'(x)$ и $v'(x)$.

Так как $\ln y = v(x) \ln u(x)$, то по формуле (4) получим

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Учитывая, что $y = u(x)^{v(x)}$, получаем следующую формулу для производной показательно-степенной функции:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \quad (5)$$

◆ **Пример 7.** Вычислить производную функции $y = x^x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) = x$ и $v(x) = x$. Используя формулу (5), получим

$$y' = x^x \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x (\ln x + 1).$$

● **Упражнения.** Найти производные следующих функций:

1. $f(x) = x^{\sin x}$. (*Отв.* $x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$.)

2. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$. (*Отв.* $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\cos x} \right)$.)

3. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. (*Отв.* $(\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$.)

Производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ можно вычислить и другим способом. Представим функцию в виде $y = e^{v(x) \ln u(x)}$ и вычислим y' :

$$\begin{aligned} y' &= [e^{v(x) \ln u(x)}]' = e^{v(x) \ln u(x)} [v(x) \ln u(x)]' = \\ &= y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя $y = u(x)^{v(x)}$, снова приходим к формуле (5).

Логарифмическая производная очень удобна при нахождении производной степенной функции с любым вещественным показателем.

8. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Производная функции $y = x^\alpha$ (α — любое вещественное число) определяется формулой

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (6)$$

Доказательство. Так как $y = x^\alpha$, то

$$\ln y = \alpha \ln x.$$

Используя формулу (4), получаем

$$\frac{y'}{y} = [\alpha \ln x]' = \frac{\alpha}{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $y = x^\alpha$, получаем формулу для производной степенной функции:

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

◆ **Пример 8.** Вычислить производную функции $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

Решение. Данную функцию представим в виде $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{1/2}$. Используя формулу (6), получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x)^{1/2-1} \cdot 2 \cos x \cdot (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x)^{-1/2} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}}. \end{aligned}$$

● **Упражнения.** Найти производные следующих функций:

- $f(x) = x^{1/x}$. (Омс. $x^{1/x-2}(1 - \ln x)$.)
- $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$. (Омс. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{10}{x^3} + \frac{9}{x^4}$.)
- $f(x) = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. (Омс. $\frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)$.)
- $f(x) = \sqrt[7]{x} \ln x$. (Омс. $\frac{\ln x + 7}{7\sqrt[7]{x^6}}$.)
- $f(x) = \sqrt[3]{x} \operatorname{arctg} x$. (Омс. $\frac{\operatorname{arctg} x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$.)
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$. (Омс. $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^2}$.)
- $f(x) = \sqrt{2x - \sin 2x}$. (Омс. $\frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$.)
- $f(x) = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$. (Омс. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$. (Омс. $\sqrt{1-x^2}$.)
- $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2}$. (Омс. $\operatorname{arctg} \sqrt{2x-1}$.)

$$11. f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right). \text{ (Омс. } \frac{-2 \cos^2 x}{\sin^3 x} \text{.)}$$

$$12. f(x) = e^{\sqrt[3]{x^2}}. \text{ (Омс. } \frac{2 e^{\sqrt[3]{x^2}}}{7 \sqrt[7]{x^5}} \text{.)}$$

$$13. f(x) = \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right). \text{ (Омс. } \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \text{.)}$$

$$14. f(x) = \arcsin \sqrt{x}. \text{ (Омс. } \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \text{.)}$$

$$15. f(x) = \sqrt[5]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}. \text{ (Омс. } \frac{1}{20} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4 \sin \frac{x+3}{4}}} \text{.)}$$

$$16. f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3}. \text{ (Омс. } \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \text{.)}$$

$$17. f(x) = \ln\left(x \sin x \cdot \sqrt{1 - x^2}\right). \text{ (Омс. } \frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{x}{1-x^2} \text{.)}$$

$$18. f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}. \text{ (Омс. } \frac{e^{5x}}{(1 + e^{10x}) \cdot \sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}} \text{.)}$$

9. Понятие производной n -го порядка. Как уже отмечалось в п. 1, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента x . Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка*.

Производная от производной некоторой функции называется *производной второго порядка* (или *второй производной*). Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* (или *третьей производной*) и т. д. Производные, начиная со второй, называются производными *высшего порядка* и обозначаются так:

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots,$$

или

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots.$$

Производная n -го порядка есть производная от производной $(n-1)$ -го порядка, т. е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Здесь мы ограничимся физическим толкованием второй производной $f''(x)$. Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то, как известно, первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x , а вторая производная в таком случае равна скорости изменения скорости, т. е. ускорению движущейся точки в момент времени x .

- ♦ **Пример 9.** Найти производные второго порядка от следующих функций: 1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 20$; 2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; 3) $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

Решение. 1) Прежде всего находим первую производную:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 10x + 6,$$

затем, считая первую производную функцией от x , берем производную от этой функции, получаем

$$f''(x) = (12x^3 + 12x^2 - 10x + 6)' = 36x^2 + 24x - 10.$$

- 2) Имеем $f(x) = \frac{x}{x+1}$, тогда $f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$. Берем про-

изводную от функции $\frac{1}{(x+1)^2}$, получаем

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(1+x)^2} \right)' = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}.$$

- 3) $f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$; $f''(x) = \left(\sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \right)' = \left(\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \right)'$;

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2\sqrt{x+1} - \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

- **Упражнения.** Найти производные второго порядка от следующих функций:

1. $f(x) = e^{-x^2}$. (Омв. $2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.)

2. $f(x) = \operatorname{tg} x$. (Омв. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.)

3. $f(x) = \operatorname{ctg} x$. (Омв. $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.)

$$4. f(x) = \arcsin \frac{x}{2}. \text{ (Омв. } \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}} \text{.)}$$

$$5. f(x) = \sin^2 x. \text{ (Омв. } 2 \cos 2x \text{.)}$$

$$6. f(x) = \cos^2 x. \text{ (Омв. } -2 \cos 2x \text{.)}$$

$$7. f(x) = \sqrt{1+x^2}. \text{ (Омв. } \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \text{.)}$$

$$8. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \text{ (Омв. } \frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{.)}$$

$$9. f(x) = \ln(2x-3). \text{ (Омв. } \frac{-4}{(2x-3)^2} \text{.)}$$

● Найти производные третьего порядка от следующих функций:

$$1. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}. \text{ (Омв. } \frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3} \text{.)}$$

$$2. f(x) = x e^{-x}. \text{ (Омв. } e^{-x}(3-x) \text{.)}$$

$$3. f(x) = e^x \cos x. \text{ (Омв. } -2e^x(\cos x + \sin x) \text{.)}$$

$$4. f(x) = x^2 \sin x. \text{ (Омв. } (6-x^2) \cos x - 6x \sin x \text{.)}$$

$$5. f(x) = x^3 2^x. \text{ (Омв. } 2^x(x^3 \ln^3 2 + 9x^2 \ln^2 2 + 18x \ln 2 + 6) \text{.)}$$

$$6. f(x) = x \ln x. \text{ (Омв. } -\frac{1}{x^2} \text{.)}$$

Вопросы для самопроверки

1. Выпишите правила и формулы дифференцирования.
2. Почему операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций?
3. Докажите, что $(C \cdot u)' = C u'$ (C — const).
4. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
5. В чем состоит прием логарифмического дифференцирования?
6. Выведите формулу производной для степенной функции с любым вещественным показателем.
7. Дайте определение второй производной функции $f(x)$.
8. Раскройте физический смысл второй производной функции $f(x)$.

§ 5. Исследование поведения функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функций. Будем говорить, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на множестве X , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих X , удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Неубывающие и невозрастающие функции объединяют общим названием *монотонные функции*.

Если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих X , удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то, как мы уже знаем, функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X . Возрастающие и убывающие функции называются также строго монотонными.

Следующая теорема устанавливает важный для решения практических задач признак возрастания и убывания функции и указывает правило для определения промежутков, на которых функция возрастает и убывает.

Теорема 2.8. Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке на интервале (a, b) и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b) , то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b) .

Замечание. Теорема остается справедливой, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) , то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b) .

Правило. Для определения промежутков возрастания и убывания следует решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

При решении задач, в которых требуется определить промежутки возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования этой функции.

◆ **Пример 1.** Определить промежутки, на которых функция $f(x) = x^3 - 12x + 11$ возрастает и убывает.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Найдём производную функции $f'(x) = 3x^2 - 12$. Из неравенства $3x^2 - 12 > 0$ или $x^2 > 4$, или $\sqrt{x^2} > 2$, т. е. $|x| > 2$ (либо $x > 2$, либо $x < -2$), следу-

ет, что данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$, а из неравенства $3x^2 - 12 < 0$ или $x^2 < 4$, или $\sqrt{x^2} < 2$, т. е. $|x| < 2$ ($-2 < x < 2$), следует, что данная функция убывает на интервале $(-2; 2)$.

● **Упражнения.** Определить промежутки, на которых возрастают и убывают следующие функции:

1. $f(x) = 3x^2 - 2x$. (Отв. Возрастает на интервале $(1/3; +\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty; 1/3)$.)
2. $f(x) = 2 - 3x + x^3$. (Отв. Возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$ и убывает на $(-1; 1)$.)

2. Отыскание точек локального экстремума функции.

Определение 1. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) при $x \neq x_0$ (рис. 58).

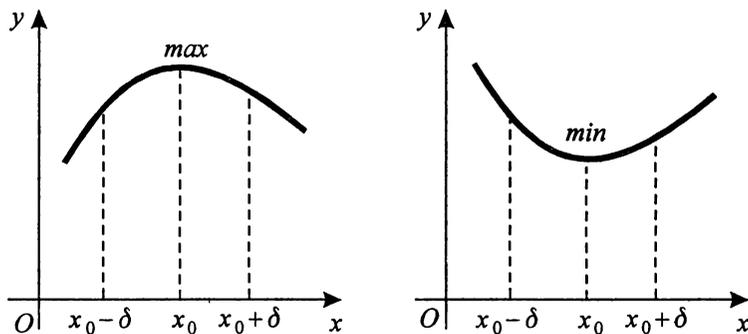


Рис. 58

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием *локальный экстремум*.

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что в случае экстремума неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) не обязано выполняться для всех значений x в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой окрестности точки x_0 . Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

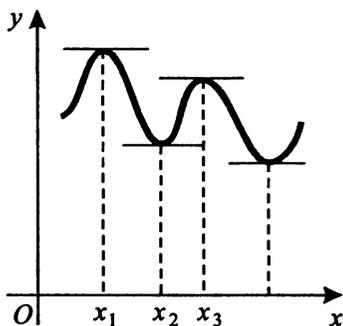


Рис. 59

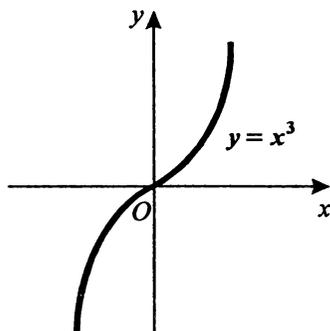


Рис. 60

Теорема 2.9 (необходимое условие локального экстремума).
 Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2.9 имеет следующий геометрический смысл. Если x_1 , x_2 и x_3 — точки локального экстремума и в соответствующих точках графика существуют касательные, то эти касательные параллельны оси Ox (рис. 59).

Иногда такие точки называют *стационарными*; мы будем называть их *точками возможного экстремума*. Если точка x_0 — точка возможного экстремума, т. е. $f'(x_0) = 0$, то она может и не быть точкой локального максимума (минимума). Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но тем не менее в точке $x = 0$ нет локального экстремума (рис. 60). Поэтому мы их и назвали точками возможного экстремума, а условие $f'(x_0) = 0$ является лишь необходимым. Установим достаточное условие существования локального экстремума.

Теорема 2.10 (достаточное условие локального экстремума).
 Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности точки x_0 . Тогда, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех x из $(x_0 - \delta, x_0)$, а $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) для всех x из $(x_0, x_0 + \delta)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум), если же $f'(x)$ во всей δ -окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Другими словами, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 — точка локального максимума, если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 — точка локального минимума, если же знак $f'(x)$ в точке x_0 не изменяется, то в точке x_0 экстремума не существует.

Задачи, в которых требуется найти, при каких значениях аргумента некоторая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, играют важную роль в математике и ее приложениях.

С математической точки зрения наиболее просты задачи, когда функция задается формулой и является при этом дифференцируемой. В этом случае для исследования свойств функции, определения участков ее возрастания и убывания, поиска точек локального экстремума существенную роль играет производная.

◆ **Пример 2.** Найти максимумы и минимумы следующих функций:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}; \quad 2) f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2; \quad 3) f(x) = (x - 2)^5.$$

Решение. 1) Область определения данной функции — вся числовая прямая, так как $x^2 - x + 3 > 0$ при любом x . Находим производную:

$$f'(x) = \frac{3(2x - 1)}{(x^2 - x + 3)^2}.$$

Решая уравнение $3(2x - 1) = 0$, получаем точку

возможного экстремума $x = 1/2$. Исследовав знак $f'(x)$ на вспомогательном рисунке (рис. 61) в окрестности точки $x = 1/2$, получаем, что в этой точке данная функция имеет локальный минимум, а $f(1/2) = -1/11$ — минимальное значение функции.

2) Область определения данной функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Решая уравнение $12x(x^2 - x - 2) = 0$, получаем три точки возможного экстремума: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$. Исследовав знак $f'(x)$ (рис. 62) в окрестности этих точек, получаем $x_1 = -1$ и $x_3 = 2$ — точки локального минимума, а $f(-1) = -3$ и $f(2) = -30$ — минимальные значения функции, $x_2 = 0$ — точка локального максимума, $f(0) = 2$ — максимальное значение функции в этой точке.

3) Область определения данной функции — вся числовая прямая. Находим производную: $f'(x) = 5(x - 2)^4$. Производная обращается в нуль в единственной точке $x = 2$. Так как $f'(x)$ положительна как слева, так и справа от этой точки, т. е. при переходе через точку $x = 2$ знака не меняет, то данная функция не имеет точек экстремума.

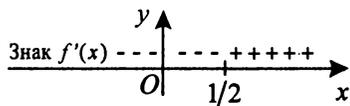


Рис. 61

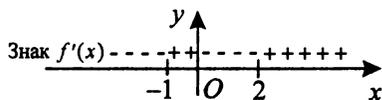


Рис. 62

• **Упражнения.** Найти максимумы и минимумы следующих функций:

1. $f(x) = x \ln x$. (Отв. При $x = \frac{1}{e}$ — минимум, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.)

2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. (Отв. При $x = -1$ — минимум, $f(-1) = 17/12$; при $x = 0$ — максимум, $f(0) = 2$; при $x = 3$ — минимум, $f(3) = -37/4$.)

3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. (Отв. При $x = -1$ — минимум, $f(-1) = -1/2$; при $x = 1$ — максимум, $f(1) = 1/2$.)

4. $f(x) = x^2 e^{-x}$. (Отв. При $x = 0$ — минимум, $f(0) = 0$; при $x = 2$ — максимум, $f(2) = 4e^{-2}$.)

◆ **Пример 3.** Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим сторону основания через x , а высоту через y . Тогда объем V бассейна будет равен $V = x^2 y = 32$, а облицовываемая поверхность S бассейна равна $S = x^2 + 4yx$. Выражая y через x $y = \frac{32}{x^2}$ и подставляя полученное выражение в формулу для поверхности, получаем

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Таким образом, задача сводится к определению такого значения x , при котором достигает своего наименьшего значения функция $S(x)$. Вычислим производную функции $S(x)$:

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}.$$

Решая уравнение $2x - \frac{128}{x^2} = 0$, получаем точку возможного экстре-

мума $x = 4$. Исследуем знак производной в окрестности этой точки (рис. 63). При $0 < x < 4$ производная отрицательна и функция $S(x)$ убывает, при $4 < x < +\infty$ производная положительна

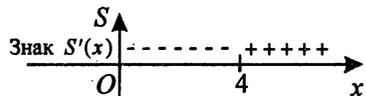


Рис. 63

и функция $S(x)$ возрастает. Следовательно, $x = 4$ — точка локального минимума, $S(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 48$ — минимальное значение функции в этой точке.

Итак, искомые размеры бассейна, наилучшие с точки зрения условия минимальности $S(x)$, $x = 4$ м, $y = 2$ м.

● Упражнения

1. Решеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры площадки. (Отв. 30×60 м.)

2. Из 32 спичек построить прямоугольник наибольшей площади. (Отв. Прямоугольник наибольшей площади получится, если обе его стороны состоят из 8 спичек.)

3. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h . (Отв. $ah/4$.)

4. Из квадратного листа картона со стороной a вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся крестообразной фигуры склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим? (Отв. $a/6$.)

5. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Периметр сечения P . При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей? (Отв. $P/(4 + \pi)$.)

6. В прямой круговой конус радиуса R и высоты h вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем. (Отв. $\frac{4}{27}\pi R^2 h$.)

7. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти этот объем. (Отв. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.)

8. Из сектора круга радиусом R свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем? (Отв. $2\pi\sqrt{2/3}$.)

9. Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. На оси Ox найти точку, сумма расстояний которой до точек A и B наименьшая. (Отв. $(3/2; 0)$.)

10. Разложить число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим. (Отв. 5 и 5.)

3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.
 Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $M(x; f(x))$ этого графика ($a < x < b$), причем касательная не параллельна оси Oy , поскольку ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

Определение 2. Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a, b) (рис. 64).

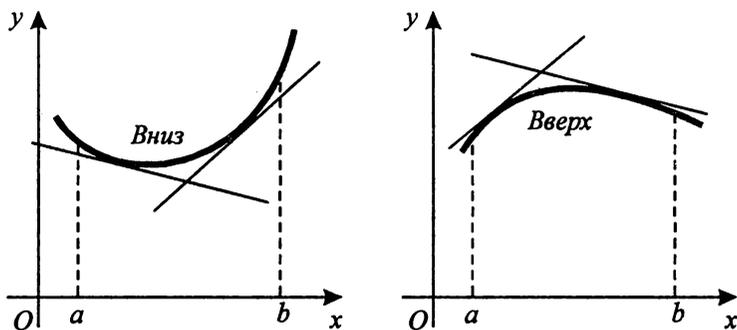


Рис. 64

Из определения следует, что на участке выпуклости касательные к графику функции не пересекаются с самим графиком и имеют с ним лишь точки касания.

Теорема 2.11. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) во всех точках (a, b) , то график функции $y = f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Определение 3. Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную, и существует такая окрестность точки x_0 , в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой — над нею, т. е. в окрестности точки перегиба график

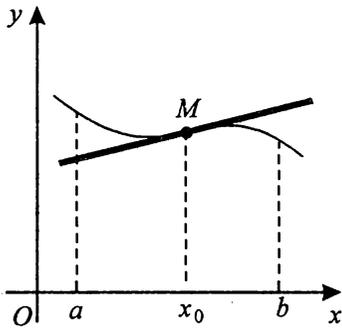


Рис. 65

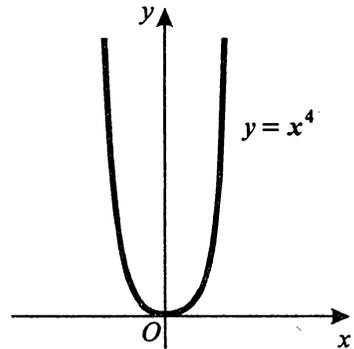


Рис. 66

функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается» через нее. Отсюда и произошло название *точка перегиба* (рис. 65).

Теорема 2.12 (необходимое условие точки перегиба). Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$ и пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$.

Следует заметить, что не всякая точка $M(x_0; f(x_0))$, для которой $f''(x_0) = 0$, является точкой перегиба. Например, график функции $f(x) = x^4$ не имеет перегиба в точке $(0; 0)$, хотя $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$ (рис. 66). Поэтому равенство нулю второй производной является лишь необходимым условием перегиба. Такие точки $M(x_0; f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0) = 0$, будем называть *критическими*. Необходимо дополнительно исследовать вопрос о наличии перегиба в каждой критической точке, для чего следует установить достаточное условие перегиба.

Теорема 2.13 (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.

З а м е ч а н и е. Теорема остается верной, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 , и существует касательная к графику функции в точке M . Тогда,

если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$. Доказательство данного факта аналогично доказательству теоремы.

Рассмотрим пример: $f(x) = x^{1/3}$. Эта функция в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Oy . Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. Однако график функции $f(x) = x^{1/3}$ имеет перегиб в точке $O(0; 0)$, так как вторая производная $f''(x) = -\frac{2}{9} \frac{1}{x^{5/3}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки (рис. 67).

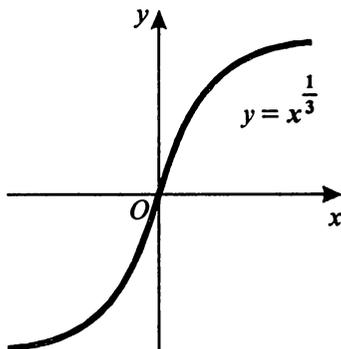


Рис. 67

Итак, вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба графика функции исследуют с помощью второй производной.

◆ **Пример 4.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^2 + x + 5$.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производные: $f'(x) = 2x + 1$; $f''(x) = 2 > 0$. Так как $f''(x) > 0$ при любом значении x , то график функции имеет на интервале $(-\infty; +\infty)$ выпуклость, направленную вниз. Точек перегиба нет.

◆ **Пример 5.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = 2x^3 + 3x$.

Решение. Область определения функции — вся числовая прямая. Находим производные: $f'(x) = 6x^2 + 3$; $f''(x) = 12x$. Из уравнения $12x = 0$ получаем одну критическую точку $x = 0$. Отметив точку $x = 0$ на вспомогательном рисунке (рис. 68) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем слева от точки $x = 0$ $f''(x) < 0$ (график направлен выпуклостью вверх), а справа — $f''(x) > 0$ (график направлен выпуклостью вниз). Таким образом, при переходе через точку $x = 0$ $f''(x)$

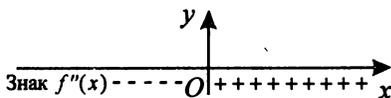


Рис. 68

меняет знак. Согласно теореме 2.13 точка с абсциссой $x=0$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Ее координаты $(0; 0)$. Кроме того, ясны и интервалы выпуклости: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

● **Упражнения.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функций:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$. (Отв. При $x = 2$ — точка перегиба, на $(-\infty, 2)$ — выпуклость вверх, на $(2, +\infty)$ — вниз.)
2. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$. (Отв. При $x = -2$ и $x = 1$ — точки перегиба, на $(-\infty, -2)$ — выпуклость вниз, на $(-2, 1)$ — вверх, на $(1, +\infty)$ — вниз.)
3. $f(x) = (x-1)^4$. (Отв. На $(-\infty, +\infty)$ — выпуклость вниз, точек перегиба нет.)
4. $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$. (Отв. При $x = -1$ и $x = 1$ — точки перегиба, на $(-\infty, -1)$ — выпуклость вверх, на $(-1, 1)$ — вниз, на $(1, +\infty)$ — вверх.)
5. $f(x) = 2x^2 + \ln x$. (Отв. При $x = 1/2$ — точка перегиба, на $(0, 1/2)$ — выпуклость вверх, на $(1/2, +\infty)$ — вниз.)
6. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. (Отв. На $(-\infty, +\infty)$ — выпуклость вниз, точек перегиба нет.)

4. Схема исследования графика функции. Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить в следующем порядке:

- 1) Найти область определения функции;
- 2) Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- 3) Найти точки возможных экстремумов;
- 4) Найти критические точки;
- 5) С помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;
- 6) Построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1)–5).

При этом в начале исследования полезно проверить, является ли данная функция четной или нечетной, чтобы при построении использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

◆ **Пример 6.** Построить по изложенной выше схеме график функции

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

1) Область определения данной функции — вся числовая прямая.

2) Точки пересечения с осями координат: $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$. Кривая проходит через начало координат.

3) Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Решая уравнение $3(x^2 - 1) = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

4) Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = 6x.$$

Из уравнения $6x = 0$ получаем одну критическую точку: $O(0; 0)$.

5) Строим вспомогательный график и исследуем знак первой и второй производных (рис. 69). Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ — раз-

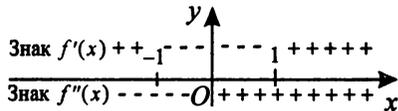


Рис. 69

деляют область существования функции на интервалы: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом — плюс, во втором — минус, в третьем — плюс (в этом можно убедиться, взяв в каждом из них произвольное значение x и вычислив при нем значение $f'(x)$). Последовательность знаков $f'(x)$ запишется так:

$+$, $-$, $+$. Получаем, что функция на $(-\infty, -1)$ возрастает, на $(-1, 1)$ убывает, а на $(1, +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: максимум при $x = -1$, причем $f(-1) = 2$; минимум при $x = 1$, причем $f(1) = -2$. Далее, отметив критическую точку $x = 0$ на вспомогательном графике (рис. 69) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем: слева от точки $x = 0$ производная $f''(x) < 0$ (график направлен выпукло-

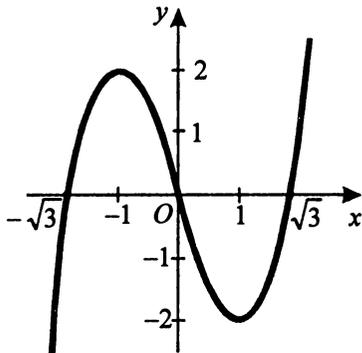


Рис. 70

стью вверх), а справа — $f''(x) > 0$ (график направлен выпуклостью вниз), т. е. точка $O(0; 0)$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции.

б) По полученным данным строим эскиз графика (рис. 70).

● **Упражнения.** Построить графики функций:

1. $f(x) = 12x - x^3$. (Отв. При $x = 2$ — максимум, $f(2) = 16$; при $x = -2$ — минимум, $f(-2) = -16$; при $x = 0$ — точка перегиба.)

2. $f(x) = x^3/3 + x^2$. (Отв. При $x = -2$ — максимум; $f(-2) = 4/3$; при $x = 0$ — минимум, $f(0) = 0$; при $x = -1$ — точка перегиба.)

3. $f(x) = x^3/3 - x^2 - 3x$. (Отв. При $x = -1$ — максимум, $f(-1) = 5/3$; при $x = 3$ — минимум, $f(3) = -9$; при $x = 1$ — точка перегиба.)

4. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$. (Отв. При $x = -3$ — максимум, $f(-3) = 0$; при $x = -1$ — минимум, $f(-1) = -4$; при $x = -2$ — точка перегиба.)

5. $f(x) = x^4/4 + x^2$. (Отв. При $x = -3$ — минимум, $f(-3) = -27/4$; при $x = -2$ и при $x = 0$ — точки перегиба.)

6. $f(x) = x^4/4 - x^3/3$. (Отв. При $x = -1$ — минимум, $f(1) = -1/12$; при $x = 0$ и при $x = 2/3$ — точки перегиба.)

7. $f(x) = x^4/4 - 2x^2$. (Отв. При $x = \pm 2$ — минимум, $f(\pm 2) = -4$; при $x = 0$ — максимум, $f(0) = 0$; при $x = \pm 2/\sqrt{3}$ — точки перегиба.)

8. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. (Отв. При $x = -1$ — максимум, $f(-1) = 2$; при $x = 1$ — минимум, $f(1) = -2$; при $x = 0$ и $x = \pm 1/\sqrt{2}$ — точки перегиба.)

9. $f(x) = x^5/5 - x^4 + x^3$. (Отв. При $x = 1$ — максимум, $f(1) = 0,2$; при $x = 3$ — минимум, $f(3) = -5,4$; при $x = 0$, при $x \approx 1/2$ и при $x \approx 5/2$ — точки перегиба.)

Вопросы для самопроверки

1. Какие функции называются монотонными?
2. Сформулируйте теорему 2.8 для случая возрастания функции.
3. Дайте определение локального экстремума функции.
4. Может ли функция иметь несколько локальных экстремумов?
5. Может ли локальный максимум некоторой функции оказаться меньше какого-то локального минимума этой же функции?
6. Что такое точки возможного экстремума функции?
7. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие экстремума. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
8. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие экстремума функции.
9. Дайте определение направления выпуклости графика функции.
10. Сформулируйте теорему, с помощью которой решается вопрос о направлении выпуклости графика функции.
11. Дайте определение точки перегиба графика функции.
12. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба графика функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
13. Какие точки называются критическими?
14. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба графика функции.
15. Приведите схему построения графика функции.

§ 6. Контрольные задачи

- 2.1. При каких значениях x касательные к графику функции $y = x^3 - x$ параллельны прямой $y = x$?
- 2.2. Под каким углом к оси Ox кривая $y = 2x^3 - x$ пересекает ось Oy ?
- 2.3. В точках $(0; 0)$, $(2; 1)$, $(4; 0)$ проведены касательные к параболе $y = \frac{4x - x^2}{4}$.
Найдите углы их наклона к оси Ox .
- 2.4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3 + 1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.
- 2.5. Найдите угол наклона к оси Ox касательной к гиперболе $xy = 1$ в точке $(1; 1)$.
- 2.6. При каком значении a кривая $y = \frac{ax - x^3}{4}$ пересекает ось Ox под углом 45° (хотя бы в одной из точек пересечения)?
- 2.7. Является ли прямая $y = 3x - 4$ касательной к кривой $y = x^3 - 2$?

- 2.8. Составьте уравнение касательной, проведенной из точки $M(-1; 3)$ к гиперболе $y = 1/x$.
- 2.9. Даны две параболы $y = 8 - 3x - 2x^2$ и $y = 2 + 9x - 2x^2$. Найдите уравнение прямой, которая касается обеих парабол.
- 2.10. Даны две прямые $y = -x$ и $y = 5x - 6$. Найдите значения параметров a и b , при которых обе данные прямые касаются параболы $y = x^2 + ax + b$.
- 2.11. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Найдите уравнения касательных к ней в точках ее пересечения с осью Ox .
- 2.12. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 2t^2 + 4$. Найдите скорость и ускорение движущейся точки в момент времени $t = 5$ с. (s — в метрах).
- 2.13. Уравнения прямолинейного движения двух точек имеют вид: $s_1 = t^2$, $s_2 = 2t^4$ (t — время, s_1 и s_2 — расстояния, пройденные первой и второй точками за время t). Сравните мгновенные и средние скорости этих двух точек на промежутке $0 \leq t \leq 1$.
- 2.14. Вычислить производную функции: 1) $f(x) = x\sqrt{1-x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{\ln x}$;
- 3) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
- 2.15. Найдите наилучший вариант изготовления консервной банки фиксированного объема V , имеющей форму прямого кругового цилиндра, и наименьшую поверхность S (на ее изготовление должно пойти наименьшее количество жести).

Глава 3. Интегрирование

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции. Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа, его многочисленные приложения к геометрии, механике, физике и технике приводят к решению обратной задачи: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим примеры.

1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей прямой, так как при любом значении x $(\sin x)' = \cos x$.

2. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ на всей прямой, ибо в каждой точке x $(x^3)' = 3x^2$.

3. Функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1; +1)$, так как в любой точке x этого интервала $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как

$[F(x) + C]' = f(x)$ для любого числа C . Например, для $f(x) = \cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

Теорема 3.1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Из теоремы следует, что множество функций $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функций для $f(x)$.

2. Неопределенный интеграл.

Определение 2. Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x) dx \text{ } ^1) = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Символ $\int f(x) dx$ обозначает, таким образом, совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Восстановление функции по ее производной или, что то же, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

◆ **Пример.** Проверить, что $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Решение. Дифференцируя результат интегрирования $(x^3 + C)' = 3x^2$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

¹⁾ Читается: «неопределенный интеграл $f(x)$ на dx ».

● **Упражнения.** Проверить, что:

$$1. \int \cos x \, dx = \sin x + C. \quad 2. \int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad 4. \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \quad 6. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

3. Основные свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

1°. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.*

$$\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x).$$

Действительно, $\left(\int f(x) \, dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2°. *Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, т. е. если $k = \operatorname{const} \neq 0$, то*

$$\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Из определения следует, что

$$k \int f(x) \, dx = k [F(x) + C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x) \, dx,$$

где $C_1 = kC$.

3°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций отдельно, т. е.*

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

В самом деле, пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x)$ и $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \pm \int g(x) dx &= [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = \\ &= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 + C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \\ &= \int [f(x) \pm g(x)] dx . \end{aligned}$$

Отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

4. Таблица основных интегралов. Приведем таблицу основных интегралов. Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

I. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$

V. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

VI. $\int e^x dx = e^x + C.$

VII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

VIII. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

IX. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0).$

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

Отметим некоторые частные случаи формулы I:

$$\int 1 \cdot dx = x + C \quad (\alpha = 0); \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (\alpha = 1);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} \right).$$

В формуле II вместо $\int \frac{1}{x} dx$ для краткости написано $\int \frac{dx}{x}$; вообще $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$ означает $\int \frac{1}{\varphi(x)} dx$.

Приведем еще одну очевидную формулу: $\int 0 \cdot dx = C$, т. е. *первообразные от функции, тождественно равной нулю, есть постоянные*.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X .
2. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.
3. В чем состоит смысл действия интегрирования?
4. Объясните, почему при интегрировании появляется произвольная постоянная.
5. Дайте определение неопределенного интеграла.
6. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
7. Докажите свойство 3° для суммы из трех слагаемых функций.
8. Каким образом составляется таблица основных интегралов.
9. Укажите табличные интегралы, которые получены из таблицы производных действием, обратным дифференцированию.

§ 2. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

♦ **Пример 1.** Вычислить интеграл $\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx$.

Решение. Применяя свойства 2° и 3°, имеем

$$\begin{aligned} & \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \\ & = 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Далее, используя соответственно формулы VIII, I, II, III таблицы основных интегралов, находим

$$5 \int \cos x dx = 5(\sin x + C_1) = 5 \sin x + 5C_1;$$

$$2 \int dx = 2(x + C_2) = 2x + 2C_2;$$

$$3 \int x^2 dx = 3 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_3 \right) = x^3 + 3C_3;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_4;$$

$$4 \int \frac{dx}{x^2+1} = 4(\operatorname{arctg} x + C_5) = 4 \operatorname{arctg} x + 4C_5.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} \right) dx = \\ & = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \operatorname{arctg} x + (5C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 + 4C_5). \end{aligned}$$

Обычно все произвольные постоянные суммируют, результат обозначают одной буквой $C = 5C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 + 4C_5$, поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} \right) dx = \\ & = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Правильность полученного результата легко проверить дифференцированием. (Сделайте это самостоятельно.)

◆ **Пример 2.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Интеграл табличный. Поэтому можно переходить к непосредственному интегрированию. По формуле XIV, где $a = 4$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

Непосредственно вычислить интегралы с помощью таблицы на практике удастся довольно редко. Приходится предварительно подынтегральное выражение тождественно преобразовывать таким образом, чтобы в результате получить табличные интегралы.

◆ **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Применяя свойство 4°, имеем

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Получили два табличных интеграла. По формулам IX и X находим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

◆ **Пример 4.** Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Решение. Так как $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, то

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx.$$

По формулам IX и I получаем

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

◆ **Пример 5.** Вычислить интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

Решение. Так как $1+2x^2 = (1+x^2) + x^2$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \\ &+ \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

По формулам I и III получаем

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Таким образом, мы видим, что для интегрирования недостаточно просто знать формулы и уметь их применять, необходим еще и опыт, который постепенно приобретается в процессе решения примеров.

● **Упражнения.** Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить следующие интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$. (Омв. $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$.)

2. $\int \left(x^4 + \sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$. (Омв. $\frac{x^5}{5} + \frac{5}{6}x\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \ln|x| + C$.)

3. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx . (Oms. 2 \arctg x - 3 \arcsin x + C .)$
4. $\int (2^x + 3^x) dx . (Oms. \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C .)$
5. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx . (Oms. 2e^x + \frac{1}{2x^2} + C .)$
6. $\int (\sin x + 5 \cos x) dx . (Oms. -\cos x + 5 \sin x + C .)$
7. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx . (Oms. x - \cos x + C .)$
8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx . (Oms. -(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + C .)$
9. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx . (Oms. \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C .)$
10. $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx . (Oms. 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + C .)$
11. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx . (Oms. \cos x - \operatorname{ctg} x + C .)$
12. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx . (Oms. -(\operatorname{ctg} x + x) + C .)$
13. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx . (Oms. \frac{1}{2}(x - \sin x) + C .)$
14. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx . (Oms. \arcsin x - \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C .)$
15. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx . (Oms. x - \operatorname{arctg} x + C .)$
16. $\int \left(\frac{1}{x^2-25} + \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx . (Oms. \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + \ln \left| x + \sqrt{x+5} \right| + C .)$
17. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3} \right) dx . (Oms. \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C .)$
18. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx . (Oms. x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C .)$

2. Метод подстановки. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*. В его основе лежит следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$, т. е. на T определена сложная функция $f[\varphi(t)]$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то справедлива формула

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределённом интеграле*.

Из формулы (1) следует, что для вычисления интеграла $\int f(x) dx$ с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ надо в функции $f(x)$ заменить x через $\varphi(t)$ и положить $dx = \varphi'(t) dt$. При этом получаем искомую функцию, выраженную через переменную t . Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Если функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi(x)$, то из (1) следует формула

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \Big|_{t=\psi(x)},$$

т. е. формулу (1) можно применять и в обратном порядке (справа налево). Для этого в дополнение к условиям теоремы достаточно потребовать, чтобы функция $x = \varphi(t)$ была строго монотонной.

◆ **Пример 6.** Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$.

Решение. Интеграл не табличный, хотя и напоминает интеграл $\int \cos x dx$. Поэтому для его вычисления естественно сделать подстановку, полагая $t = 3x$; тогда $dt = (3x)' dx = 3 dx$, $dx = \frac{1}{3} dt$. По формуле (1) получаем

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos t dt$$

— табличный интеграл. Применяя формулу VIII таблицы основных интегралов, находим

$$\frac{1}{3} \int \cos t \, dt = \frac{1}{3} \sin t + C.$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

Существует несложный, но весьма эффективный прием, позволяющий упростить вычисление интегралов. Если числитель подынтегральной функции $f(x)$ равен производной знаменателя, то справедлива формула

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C. \quad (2)$$

Действительно, используя подстановку $t = f(x)$, $dt = f'(x) \, dx$, имеем

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$

◆ **Пример 7.** Вычислить интеграл $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx.$$

Замечая, что $(\sin x)' = \cos x$, по формуле (2) получаем

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

Данный интеграл можно вычислить и с помощью подстановки $t = \sin x$.

◆ **Пример 8.** Вычислить интеграл $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx$.

Решение. Полагаем $t = e^x$, $x = \ln t$. Отсюда $dx = (\ln t)' \, dt = \frac{dt}{t}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx &= \int \frac{t - 1}{t + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t + 1)}{(t + 1)t} \, dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t + 1} - \int \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{(t + 1)'}{t + 1} \, dt - \int \frac{dt}{t} = 2 \ln(t + 1) - \ln t + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2 \ln(1 + e^x) - x + C.$$

◆ **Пример 9.** Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

Решение. Положим $x-1=t$, следовательно, $x=t+1$. Отсюда $dx = (t+1)' dt = dt$; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3 \ln|t| - \frac{1}{t} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получим

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

◆ **Пример 10.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3}.$$

Положим $t = \sqrt[6]{x}$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. Находим

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1}.$$

Выделяя делением целую часть дроби, получим

$$6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \left[\int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = 6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right] + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

И, вообще, если подынтегральное выражение не содержит других

корней, кроме корня $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где a, b, c, d — некоторые числа $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$;

m — натуральное число, то следует применять подстановку $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

◆ **Пример 11.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделаем подстановку $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$,

$1-x = \frac{2}{t^2+1}$, $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)' dt = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} &= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

◆ **Пример 12.** Вычислить интеграл $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{4x+1}$; тогда $t^2 = 4x+1$, $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}$,

$dx = \frac{1}{2}t dt$. Находим

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} dx &= \int \frac{\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4} + 5}{t} \cdot \frac{1}{2}t dt = \int \left(\frac{3}{8}t^2 + \frac{17}{8}\right) dt = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{17}{8}t + C = \frac{1}{8}\sqrt{4x+1}(4x+18) + C = \\ &= \frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{4x+1} + C. \end{aligned}$$

Необходимо заметить, что удачный выбор подстановки обычно представляет известные трудности. Для их успешного преодоления необходимо хорошо владеть техникой дифференцирования и твердо знать табличные интегралы.

◆ **Пример 13.** Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x^2+a} + x = t$, откуда $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) dx = dt$;
таким образом,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a} + x} dt,$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{x^2+a} + x| + C.^{1)}$$

◆ **Пример 14.** Вычислить интеграл $\int \sin^n x \cos x dx$.

Решение. Положим $t = \sin x$, откуда $dt = \cos x dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos x dx &= \int t^n dt = \\ &= \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C & \text{при } n \neq -1, \\ \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C & \text{при } n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

◆ **Пример 15.** Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$.

Решение. Положим $x^2+1 = t$, $2x dx = dt$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2+1)^n} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C = \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

При $n = 1$ аналогично получим

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

¹⁾ Здесь вычислен табличный интеграл XII.

- **Упражнения.** Применяя метод замены переменной, вычислить следующие интегралы:

1. $\int \sin(3x+5) dx$. (Омв. $-\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C$.)

2. $\int e^{2x} dx$. (Омв. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$.)

3. $\int \operatorname{tg} x dx$. (Омв. $-\ln|\cos x|+C$.)

4. $\int e^{-x^2} dx$. (Омв. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.)

5. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1} dx$. (Омв. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+\ln|e^x-1|+C$.)

6. $\int \frac{x^4 dx}{x^5+7}$. (Омв. $\frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C$.)

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. (Омв. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+C$.)

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$. (Омв. $6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$.)

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$. (Омв. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$.)

10. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ ($t=1+\ln x$) . (Омв. $\ln|1+\ln x|+C$.)

11. $\int e^{\cos x} \sin x dx$. (Омв. $-e^{\cos x}+C$.)

12. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}$. (Омв. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C$.)

13. $\int x(5x-7)^{50} dx$. (Омв. $\frac{1}{25}\left[\frac{1}{52}(5x-7)^{52}+\frac{7}{51}(5x-7)^{51}\right]+C$.)

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$. (Омв. $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C$.)

15. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$. (Омв. $\frac{2(44-15x)}{27}\sqrt{1-3x}+C$.)

16. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3-8} dx$ ($t=x^3-8$) . (Омв. $\frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}+C$.)

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} \quad (t = \sqrt{e^x+1}). \quad (\text{Омс. } \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| + C.)$
18. $\int \frac{3^{1/x} dx}{x^2} \quad \left(t = \frac{1}{x} \right). \quad (\text{Омс. } -\frac{3^{1/x}}{\ln 3} + C.)$
19. $\int \frac{(\text{arctg } x)^{100}}{1+x^2} dx \quad (t = \text{arctg } x). \quad (\text{Омс. } \frac{(\text{arctg } x)^{101}}{101} + C.)$
20. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}. \quad (\text{Омс. } \arcsin \frac{e^x}{2} + C.)$
21. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. \quad (\text{Омс. } 2 \sin \sqrt{x} + C.)$
22. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}. \quad (\text{Омс. } \frac{1}{4 \arccos^4 x} + C.)$

При интегрировании иногда приходится метод замены переменной применять несколько раз.

◆ **Пример 16.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (-a \leq x \leq a).$

Решение. Положим $x = a \sin t \quad (-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)$. Функция $x = a \sin t$ монотонна и имеет непрерывную производную x'_t . При этом, когда t изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, переменная x изменяется от $-a$ до a . Далее имеем $dx = a \cos t dt$. Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

Снова получили не табличный интеграл. Преобразуем его. Так как $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, то

$$a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt.$$

Первый из двух последних интегралов табличный и вычисляется непосредственно:

$$\frac{a^2}{2} \int dt = \frac{a^2}{2} t + C_1.$$

Для вычисления второго интеграла сделаем подстановку $u = 2t$. Тогда $du = 2 dt$, $dt = \frac{du}{2}$ и

$$\frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{4} \int \cos u du = \frac{a^2}{4} \sin u + C_2 = \frac{a^2}{4} \sin 2t + C_2.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C,$$

где $C = C_1 + C_2$. Для того, чтобы вернуться к переменной x , из равенства $x = a \sin t$ находим

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$. Подставив, окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?
2. В чем состоит метод подстановки и какая его главная цель?
3. Напишите формулу (1) замены переменной. При каком условии эту формулу можно применять и в обратном порядке (справа налево)?
4. Докажите формулу $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$.

§ 3. Определенный интеграл

1. Определение определенного интеграла. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Обозначим это разбиение через τ , а точки x_0, x_1, \dots, x_n будем называть *точками разбиения*. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). Через Δx_i обо-

значим разность $x_i - x_{i-1}$, которую будем называть *длиной* частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Составим сумму:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (1)$$

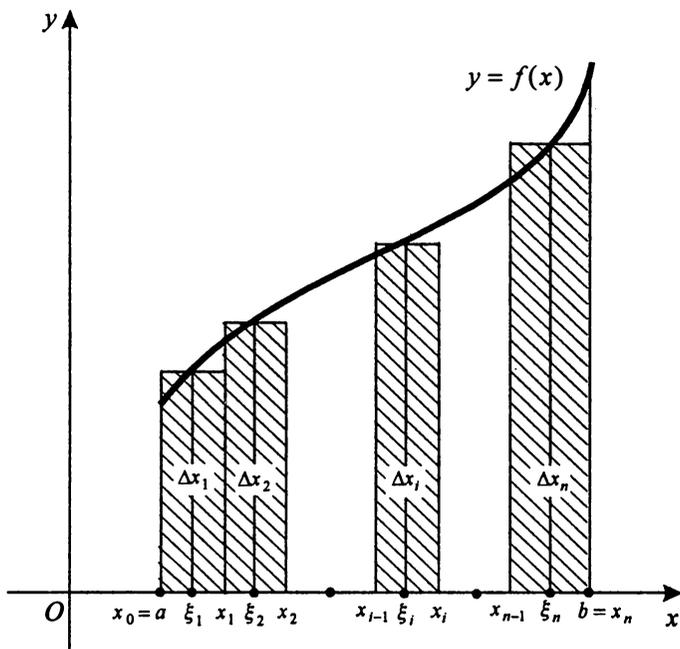


Рис. 71

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i . Геометрический смысл суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, если $f(x) \geq 0$ (рис. 71).

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения $\tau: \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$.

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается сле-

дующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (2)$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на отрезке $[a, b]$ (*теорема о существовании определенного интеграла*).

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (2) зависит только от вида функций $f(x)$ и от чисел a и b . Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл (2) определяется однозначно и представляет собой некоторое число.

◆ **Пример 1.** Используя определение, вычислить интеграл $\int_a^b C dx$, где

C — некоторое число.

Решение. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ и составим соответствующую интегральную сумму (1). Так как подынтегральная функция $f(x) = C$ постоянна, то для любого выбора промежуточных точек ξ_i получим интегральную сумму вида

$$\sigma = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \dots + C\Delta x_n = \sum_{i=1}^n C\Delta x_i.$$

Далее имеем

$$\sum_{i=1}^n C\Delta x_i = C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \dots + (b - x_n)] = C(b - a).$$

¹⁾ Читается: «определенный интеграл от a до b $f(x)$ на dx ».

²⁾ Вместо $\lambda \rightarrow 0$ было бы неправильно писать $n \rightarrow \infty$, так как можно привести пример (подумайте, какой?), когда увеличение числа точек разбиения $[a, b]$ еще не обязательно означает, что все Δx_i неограниченно убывают; если же $\lambda \rightarrow 0$, то все $\Delta x_i \rightarrow 0$ и обязательно $n \rightarrow \infty$.

Видим, что интегральная сумма для данной функции не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек ξ_i и равна $C(b-a)$. Следовательно, и ее предел при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ равен той же величине.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b C \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(b-a).$$

◆ **Пример 2.** Используя определение, вычислить интеграл $\int_0^1 x \, dx$.

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных (в данном случае это удобно) частей точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = 1$. Длина каждого частичного отрезка $\Delta x_i = 1/n$. Причем если $n \rightarrow \infty$, то

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ и наоборот. В качестве промежуточных точек ξ_i

($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) возьмем правые концы частичных отрезков: $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$

($i = 1, 2, \dots, n$). Составим соответствующую интегральную сумму (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Вычислим предел интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$. Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, по определению,

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i = \frac{1}{2}.$$

● **Упражнение.** На примере 2 покажите, что при другом выборе промежуточных точек ξ_i (например, $\xi_i = \frac{i-1}{n}$ — левые концы частичных отрезков) предел интегральной суммы, а значит, и величина данного интеграла не изменятся.

2. Основные свойства определенного интеграла.

1°. По определению, $\int_a^a f(x) dx = 0$.

2°. По определению, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

3°. Каковы бы ни были числа a , b , c , всегда имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4°. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

5°. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, связано с большими трудностями. Поэтому существует другой практически более удобный метод вычисления определенных интегралов, который основан на тесной связи, существующей между понятиями неопределенного и определенного интегралов.

Теорема 3.3 (основная теорема интегрального исчисления). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Формула (3) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать в виде

$$F(x)|_a^b \quad \text{или} \quad [F(x)]_a^b;$$

тогда формула (3) принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что в формуле (3) в качестве $F(x)$ может быть любая первообразная функции $f(x)$ из семейства $F(x) + C$.

Итак, формула (3), с одной стороны, устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралами, с другой стороны, дает простой метод вычисления определенного интеграла: *определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования.* Эта формула открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, так как задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла, которая рассмотрена достаточно полно.

◆ **Пример 3.** Вычислить интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

Решение. Так как одной из первообразных для функции $f(x) = \sin x$ является функция $F(x) = -\cos x$, то, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x|_a^b = \cos a - \cos b.$$

◆ **Пример 4.** Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

● **Упражнения.** Вычислить следующие интегралы:

1. $\int_0^2 (3x^2 - 1) dx$. (Отв. 6.)

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. (Отв. $\ln 2$.)

3. $\int_1^2 e^x dx$. (Отв. $e(e-1)$.)

4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. (Отв. $\ln(3 + \sqrt{10})$.)

$$5. \int_0^{\pi} \sin x \, dx \text{ . (Омс. 2)}$$

$$6. \int_a^b x^n \, dx \quad (n \neq -1) \text{ . (Омс. } \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \text{ .)}$$

$$7. \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \text{ . (Омс. } \frac{1}{3} \text{ .)}$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \text{ . (Омс. 1.)}$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{ . (Омс. } \frac{\pi}{4} \text{ .)}$$

$$10. \int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \text{ . (Омс. } \frac{\pi}{4} - \arctg \frac{\pi}{4} \text{ .)}$$

$$11. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx \text{ . (Омс. } 2\frac{5}{8} \text{ .)}$$

$$12. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \text{ . (Омс. } \frac{\pi}{6} \text{ .)}$$

$$13. \int_0^2 x(3-x) \, dx \text{ . (Омс. } \frac{10}{3} \text{ .)}$$

$$14. \int_{-\pi/4}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} \, dx \text{ . (Омс. } \frac{\pi^3}{64} + \arctg \frac{\pi}{4} \text{ .)}$$

4. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 3.4. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда если: 1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ (рис. 72), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt \text{ .} \quad (4)$$

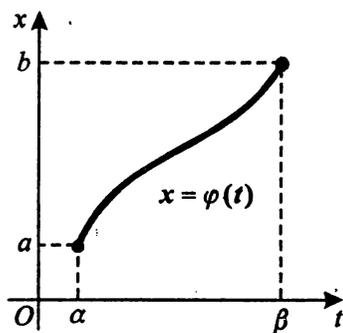


Рис. 72

Формула (4) называется *формулой замены переменной или подстановки в определенном интеграле*.

З а м е ч а н и е. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной мы должны были от новой переменной t возвращаться к старой переменной x , то при вычислении определенного интеграла этого можно не делать, так как цель — найти число, которое в силу формулы (4) равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

◆ **Пример 5.** Вычислить интеграл $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Рассмотрим подстановку $x = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Такая замена переменной удовлетворяет всем условиям теоремы 3.4. Действительно, во-первых, $f(x) = x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$ непрерывна на $[0, a]$, во-вторых, функция $x = a \sin t$ дифференцируема на $[0, \pi/2]$ и $x'_t = a \cos t$ непрерывна на $[0, \pi/2]$ и, в-третьих, при изменении t от 0 до $\pi/2$ функция $x = a \sin t$ возрастает от 0 до a , при этом $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\pi/2) = a$. Так как $dx = (a \sin t)' dt = a \cos t dt$, то, применяя формулу (4), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

Замечание 2. При использовании формулы (4) необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то замена переменной по указанной формуле может привести к неверному результату.

◆ **Пример 6.** Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} dx$.

Решение. Имеем $\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$. С другой стороны,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg} x$ формально приводит к следующему результату:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Получен неверный результат, так как $\pi \neq 0$. Это произошло потому, что функция $t = \operatorname{tg} x$ разрывна при $x = \pi/2$ и не удовлетворяет условиям теоремы 3.4.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое разбиение отрезка $[a, b]$?
2. Что такое интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и в чем состоит ее геометрический смысл?
3. Дайте определение определенного интеграла как предела интегральной суммы. Почему вместо $\lambda \rightarrow 0$ нельзя писать $n \rightarrow \infty$?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. При каких условиях справедлива формула Ньютона — Лейбница? Почему эту формулу считают основной формулой интегрального исчисления?
6. При каких условиях справедлива формула замены переменной в определенном интеграле?
7. Почему при замене переменной в определенном интеграле можно не возвращаться к старой переменной?
8. Приведите пример, когда нарушение условий теоремы 3.4 привело бы к неверному результату.

§ 4. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции. Пусть на плоскости Oxy дана фигура, ограниченная отрезком $[a, b]$ оси Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ (см. рис. 71). Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*, площадь S которой вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx . \quad (1)$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$* . В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

◆ **Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, прямой $x = 1$ и осью Ox (рис. 73).

Решение. По формуле (1) имеем

$$S = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} .$$

При этом если $\alpha = 1$, то $S = 1/2$; если $\alpha = 2$, то $S = 1/3$ и т. д.

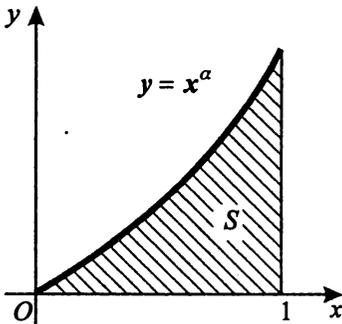


Рис. 73

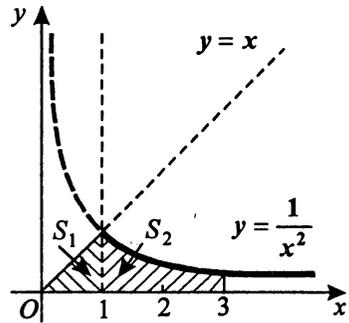


Рис. 74

Более сложные задачи на вычисление площадей решают, используя свойство *аддитивности*¹⁾ площади: можно разбить фигуру на непересекающиеся части и вычислить площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

◆ **Пример 2.** Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями

$$y = x, \quad y = 1/x^2, \quad y = 0, \quad x = 3.$$

Решение. Данную фигуру можно рассматривать как криволинейную трапецию, ограниченную осью абсцисс, прямыми $x = 0$ и $x = 3$ и графиком функции, которая на отрезке $[0, 1]$ равна x , а на отрезке $[1, 3]$ равна $1/x^2$. Записать первообразную такой функции нелегко. Поэтому разобьем данную криволинейную трапецию прямой $x = 1$ на две части (рис. 74). Площади этих частей легко найти по формуле (1):

$$S_1 = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Согласно свойству аддитивности площади, $S = S_1 + S_2 = 7/6$.

Иногда при вычислении площадей фигур бывает полезно еще одно свойство площади, которое называется *инвариантностью*²⁾ *относительно перемещений*: одинаковые фигуры имеют одинаковые площади.

◆ **Пример 3.** Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0.$$

Решение. Данная фигура (рис. 75) станет криволинейной трапецией, если отразить ее относительно прямой $y = x$ (рис. 76). График функ-

¹⁾ Аддитивный — от лат. *additivus* (полученный сложением).

²⁾ Инвариантный — от франц. *invariant* (неизменяющийся).

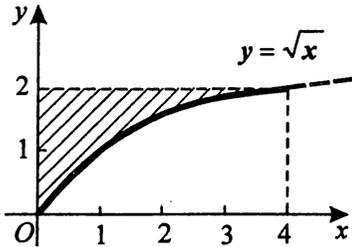


Рис. 75

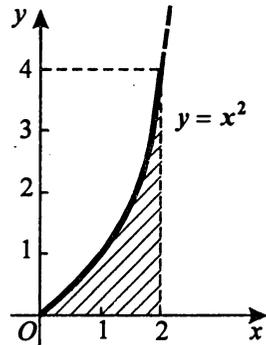


Рис. 76

ции $y = \sqrt{x}$ отобразится при этом в график обратной функции $y = x^2$, прямая $y = 2$ — в прямую $x = 2$. Так как симметричные фигуры одинаковы, то они имеют равные площади, поэтому по формуле (1) имеем

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Другое решение этой задачи можно получить, заметив, что данная фигура дополняется криволинейной трапецией (снизу) до прямоугольника, площадь которого равна 8. Поэтому

$$S = 8 - \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left(8 - \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Такое решение — еще один пример использования свойства аддитивности площади: данная фигура представляется как «разность» двух более простых фигур.

Прием вычисления площадей, рассмотренный в замечании, можно сформулировать в более общем виде. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, причем при всех значениях x из этого отрезка $y_1 \leq y_2$. Найдем площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций, а также прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 77).

Если обе функции неотрицательны, то площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс. Следовательно, площадь S данной фигуры можно найти так:

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (2)$$

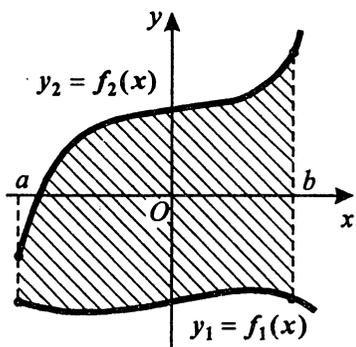


Рис. 77

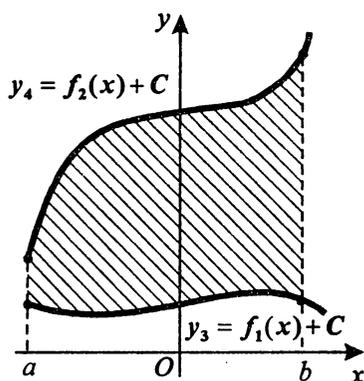


Рис. 78

Формула (2) справедлива для любых непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, не обязательно положительных. Действительно, если функции y_1 и y_2 могут принимать и отрицательные значения (но по-прежнему $y_1 \leq y_2$) (рис. 77), то прибавим к обеим функциям одну и ту же постоянную C , которую выберем настолько большой, чтобы графики функций $y_3 = f_1(x) + C$ и $y_4 = f_2(x) + C$ оказались выше оси абсцисс (рис. 78). Фигура на рис. 78 получается из фигуры, изображенной на рис. 77 параллельным переносом, и поэтому имеет такую же площадь. К фигуре на рис. 78 применима формула (2):

$$S = \int_a^b [f_2(x) + C] dx - \int_a^b [f_1(x) + C] dx = \int_a^b [(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C)] dx.$$

Поскольку $(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C) = f_2(x) - f_1(x)$, формула (2) верна и для фигуры на рис. 77.

◆ **Пример 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y_1 = f_1(x) = x$ и $y_2 = f_2(x) = 2 - x^2$ (рис. 79).

Решение. На рис. 79 видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Найдем их. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

В результате получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Искомую площадь находим теперь с помощью формулы (2):

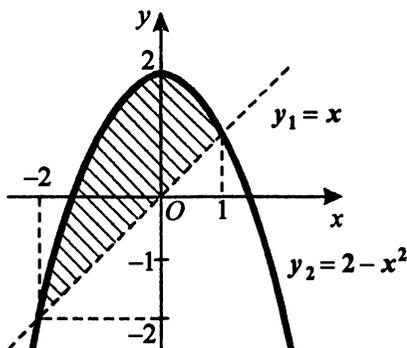


Рис. 79

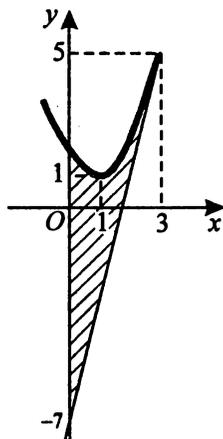


Рис. 80

$$S = \int_{-2}^1 [(2-x^2) - x] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

◆ **Пример 5.** Найти площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3; 5)$ и осью Oy .

Решение. Уравнение касательной к кривой $f(x) = x^2 - 2x + 2$ в точке $(3; 5)$ имеет вид $y - 5 = f'(3) \cdot (x - 3)$. Поскольку $f'(x) = 2x - 2$ и $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$, получаем уравнение касательной $y - 5 = 4(x - 3)$, или $y = 4x - 7$. Так как ветви параболы направлены вверх, то парабола лежит над касательной, т. е. $x^2 - 2x + 2 \geq 4x - 7$ на отрезке $[0, 3]$ (рис. 80). По формуле (2) находим искомую площадь

$$S = \int_0^3 [x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)] dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = 9.$$

● **Упражнения.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. (Отв. $\frac{32}{3}$.)
2. $y^2 = 2px$, $x = h$. (Отв. $\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}$.)
3. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$. (Отв. 1.)
4. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. (Отв. $8/3$.)

5. $y = \sin 3x$, $y = 0$, где $0 \leq x \leq \pi/3$. (Отв. $2/3$.) 6. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$. (Отв. $4 \ln(4e)$.) 7. $y = x^2$, $y = 1$. (Отв. $4/3$.) 8. $y = \cos^2 x - \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/4$. (Отв. $1/2$.) 9. $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$. (Отв. $11/2$.) 10. $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$. (Отв. $2 + \pi^3/6$.) 11. $y = \arcsin 2x$, $x = 0$, $y = -\pi/2$. (Отв. $1/2$.) 12. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = \pi/2$, где $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. (Отв. $(\pi - 2)/4$.) 13. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$. (Отв. $2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$.) 14. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. (Отв. $1/3$.) 15. $y = |x^2 - 1|$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$ (Отв. 4.) 16. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y = -x^2 - 2x + 3$, касательной к ней в точке $(2; -5)$ и осью Oy . (Отв. $8/3$.) 17. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательной к ней в точках $(0; -3)$ и $(3; 0)$. (Отв. $9/4$.) 18. Найти площади фигур, изображенных на рис. 81—84. (Отв. $19/3$; $(2e-1)/e$; 2 ; $4\pi/3 - \sqrt{3}$.)

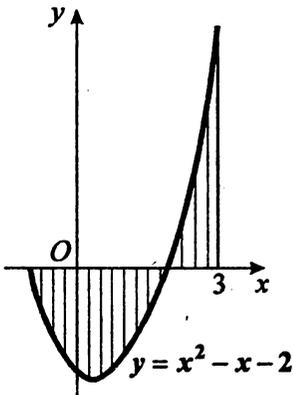


Рис. 81

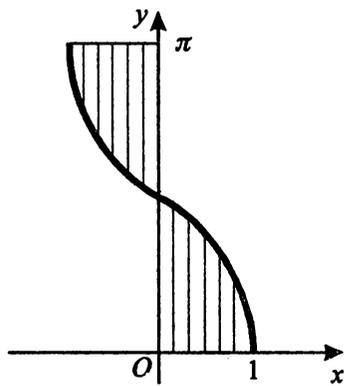


Рис. 83

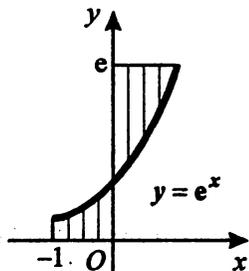


Рис. 82

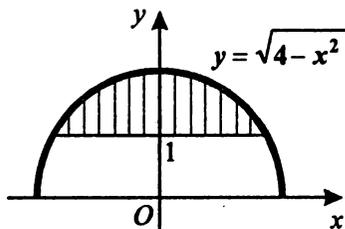


Рис. 84

Интересно было бы с помощью интегрирования получить известную формулу для площади круга радиуса R .

◆ **Пример 6.** Показать, что площадь S круга, радиус которого R , равна πR^2 .

Решение. Составим нужный интеграл. Для этого введем систему координат Oxy и рассмотрим круг радиуса R с центром в начале координат (рис. 85). Этот круг — множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 \leq R^2$. Четверть круга в I квадранте — это криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, осью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = R$. Следовательно,

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Вычислим этот интеграл. Сделаем подстановку $x = R \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Проверим законность такой замены переменной, т. е. выясним, выполняются ли условия теоремы 3.4. Имеем:

1) функция $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ непрерывна на отрезке $[0, R]$, а функция $x = \varphi(t) = R \sin t$ дифференцируема на отрезке $[0, \pi/2]$ и ее производная $\varphi'(t) = R \cos t$ непрерывна на этом отрезке;

2) при возрастании t от 0 до $\pi/2$ функция $\varphi(t) = R \sin t$ возрастает от 0 до R , т. е. множество значений функции $x = \varphi(t)$ — отрезок $[0, R]$;

3) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi/2) = R$.

Таким образом, подстановка $x = R \sin t$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.4. Применяя формулу (4) из § 3, находим

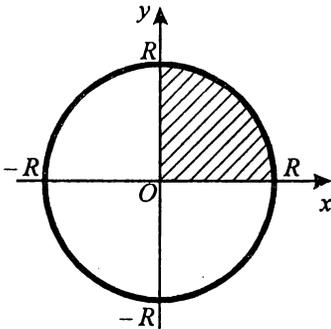


Рис. 85

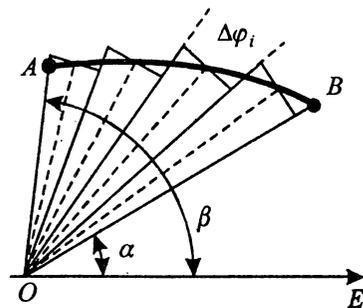


Рис. 86

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = \\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

Итак, получена формула площади круга: $S = \pi R^2$.

2. Площадь криволинейного сектора. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой AB и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β , будем называть *криволинейным сектором* (рис. 86). Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

◆ **Пример 7.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, где a — положительное число (рис. 87).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус опишет кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (3) имеем

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Заметим, что точка C отстоит от полюса на расстоянии $\rho = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi^3 a^2 = 3S_{OABC}$, т. е. площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $1/3$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

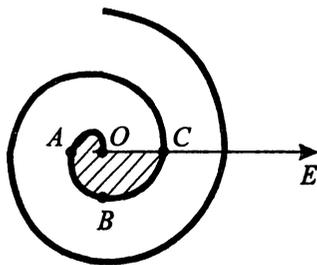


Рис. 87

3. Длина дуги кривой. Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$ в направлении от A к B . Соединив эти точки хордами, получим некоторую вписанную ломаную линию, периметр которой обозначим через P (рис. 88). Обозначим через l_i длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломаной линии, а через μ — длину наибольшего из ее звеньев: $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \{l_i\}$.

Определение. Число L называется пределом периметров P при $\mu \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой ломаной, у которой $\mu < \delta$, выполняется неравенство

$$|L - P| < \varepsilon.$$

Если существует конечный предел L периметра P вписанной в кривую ломаной линии при $\mu \rightarrow 0$, то этот предел называется длиной дуги \overline{AB} :

$$L = \lim_{\mu \rightarrow 0} P.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то длина дуги \overline{AB} выражается формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (4)$$

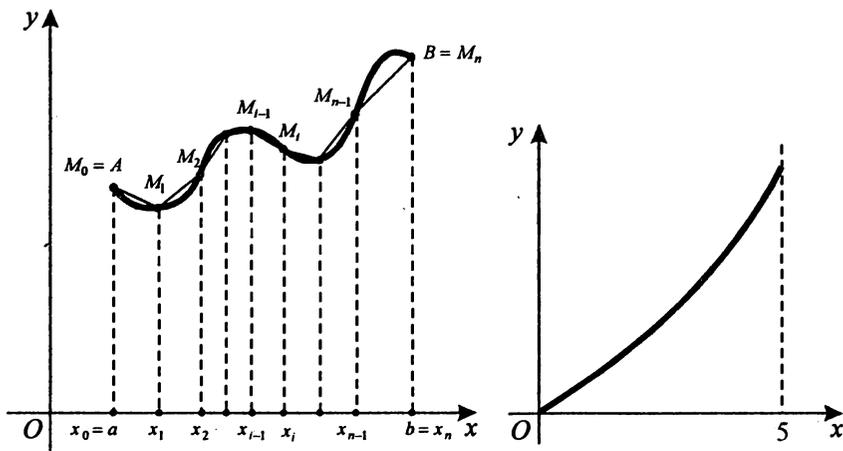


Рис. 88

Рис. 89

- ◆ **Пример 8.** Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 5$ (рис. 89).

Решение. Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (4) получим

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} \, dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

- ◆ **Пример 9.** Показать, что длина L окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Решение. График функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ при $0 \leq x \leq R/\sqrt{2}$ представляет собой восьмую часть окружности (рис. 85). Следовательно,

$$\frac{L}{8} = \int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Так как $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то $1 + [f'(x)]^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$. Поэтому, согласно формуле (4), получаем

$$\frac{L}{8} = R \int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Как и в примере 6 сделаем замену переменной $x = R \sin t$, где $0 \leq t \leq \pi/4$. Тогда по формуле (4) из § 3 замены переменной имеем

$$\frac{L}{8} = R \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi R}{4},$$

откуда приходим к нужному результату.

З а м е ч а н и е. Хотя в примере 9 удобнее было считать интеграл в пределах от 0 до R , мы поступили иначе. Это связано с тем, что при выводе формулы длины дуги предполагалось, что функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$; в данном случае при $x = R$ производная функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ обращается в бесконечность.

● **Упражнения.** Найти длину дуги кривой:

1. $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до $x = 4$. (Отв. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.)

2. $y = x^2 - 1$, отсеченной осью Ox . (Отв. $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$.)

3. $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$. (Отв. $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})$.)

4. **Площадь поверхности вращения.** Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, и пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$. Тогда поверхность, образованная вращением кривой AB вокруг оси Ox , имеет площадь S , которая может быть вычислена по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (5)$$

◆ **Пример 10.** Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии H друг от друга, называется *шаровым поясом* высоты H . Вычислить площадь поверхности шарового пояса, если радиус шара равен R , а высота пояса равна H (рис. 90).

Решение. Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность тела, полученного при вращении дуги окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $a \leq x \leq b$, $b - a = H$, вокруг оси Ox (рис. 91). Так как

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ то } 1 + [f'(x)]^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}, \text{ поэтому, согласно формуле (5),}$$

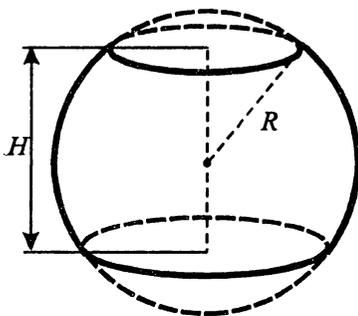


Рис. 90

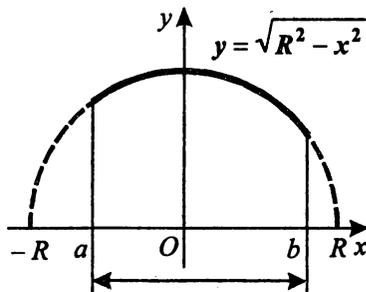


Рис. 91

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b - a) = 2\pi RH.$$

Итак, площадь поверхности S шарового пояса вычисляется по формуле $S = 2\pi RH$. Если $H \rightarrow 2R$, то в пределе получим площадь поверхности всей сферы: $S = 4\pi R^2$.

● **Упражнения.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox :

1. Дуги синусоиды $y = \sin x$ от $x = 0$ до $x = \pi$ (Отв. $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.)

2. Дуги кривой $y = \frac{x^3}{3}$ от $x = -2$ до $x = 2$ (Отв. $\frac{34\sqrt{17} - 2}{9}\pi$.)

3. Полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. (Отв. $4\pi R^2$.)

5. Объем тела. Как уже известно, с помощью определенного интеграла можно вычислять площади фигур и длины кривых. Нахождение объемов некоторых тел также можно свести к вычислению определенных интегралов.

Если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Если криволинейная трапеция $0 \leq x \leq \varphi(y)$, $a \leq y \leq b$ вращается вокруг оси Oy , то объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

◆ **Пример 11.** Вычислить объем шара радиуса R .

Р е ш е н и е. Шар радиуса R получается вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox (рис. 92), поэтому его объем V можно найти по формуле (6).

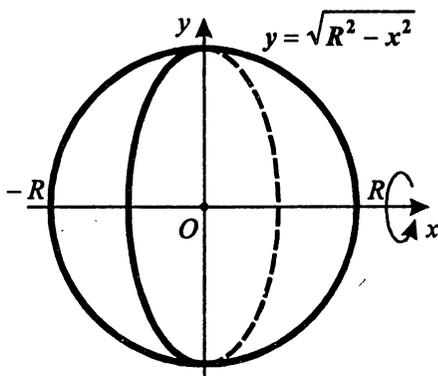


Рис. 92

Используя симметрию данного шара относительно оси Oy , находим

$$V = \pi \int_{-R}^R (f(x))^2 dx = 2\pi \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Таким образом, получена формула объема шара $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

● **Упражнения.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, где $y \geq 0$ вокруг оси Ox . (Отв. $\frac{4}{3} \pi ab^2$.)
- $y^2 = 2px$, $x = h$ вокруг оси Ox . (Отв. πrh^2 .)
- $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ вокруг каждой из следующих прямых:
1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3) $x = 2\pi$; 4) $x = -1$; 5) $x = -2$; 6) $y = 1$; 7) $y = -2$.
(Отв. $\pi^2/2$; $2\pi^2$; $6\pi^2$; $2\pi(\pi + 2)$; $2\pi(\pi + 4)$; $\pi(8 - \pi)/2$; $\pi(\pi + 16)/2$.)
- $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, вокруг оси Ox (Отв. $3\pi/10$.)
- $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy .
(Отв. $\pi(e^2 - 1)/2$; 2π .)
- $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy . (Отв. $6\pi/7$; $3\pi/5$.)
- $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг каждой из следующих прямых:
1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3) $y = -1$; 4) $x = 1$; 5) $x = -1$; 6) $y = 1$.
(Отв. $\pi(e - 2)$; $\pi(e^2 + 1)/2$; πe ; $\pi(e^2 - 3)/2$; $\pi(e^2 + 5)/2$; $\pi(4 - e)$.)
- $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = 0$ вокруг оси Ox . (Отв. $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.)
- $y = 4/x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг: 1) оси Ox ; 2) оси Oy . (Отв. 12π ; 24π .)

6. Центр тяжести кривой и криволинейной трапеции.

Центр тяжести системы материальных точек. Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$, массы которых соответственно равны m_1 , m_2 , ..., m_n .

Статическим моментом M_x этой системы относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты:

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n .$$

Аналогично определяется статический момент M_y системы относительно оси Oy :

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n.$$

Точка с координатами $\left(\frac{M_y}{m}; \frac{M_x}{m}\right)$, где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, называется *центром тяжести*¹⁾ системы.

◆ **Пример 12.** Показать, что центр тяжести системы, состоящей из трех точек P , Q , R , в которых сосредоточены единичные массы ($m_P = m_Q = m_R = 1$), находится в точке пересечения медиан треугольника (рис. 93).

Решение. Убедимся, например, в том, что центр тяжести находится на медиане PM . Введем систему координат в плоскости треугольника PQR так, чтобы ее центр $(0; 0)$ находился в точке P , а ось Ox проходила по прямой PM . Тогда если ордината точки Q равна y_0 , то ордината точки R равна $(-y_0)$. Отсюда следует, что ордината y_C центра тяжести C равна

$$y_C = \frac{0 \cdot 1 + y_0 \cdot 1 - y_0 \cdot 1}{2} = 0.$$

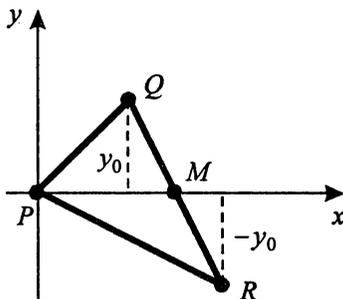


Рис. 93

Таким образом, точка C лежит на Ox (прямой PM). Рассуждая аналогично, покажем, что центр тяжести C лежит на медианах QL и RN . Следовательно, C — точка пересечения медиан.

Пусть теперь массы не сосредоточены в отдельных точках, а расположены «сплошным образом», заполняя линию или плоскую фигуру. Тогда для определения статического момента вместо суммы потребуется интеграл.

Центр тяжести кривой. Рассмотрим некоторую плоскую кривую AB . Будем предполагать, что: 1) кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) кривая однородна, т. е. ее линейная плотность ρ (масса, приходящаяся на единицу длины) постоянна и равна единице. L — длина всей кривой AB .

Поскольку масса всей кривой $m = \rho L = L$ ($\rho = 1$), координаты центра тяжести кривой AB вычисляются по формулам

¹⁾ Мы не различаем понятия «центр тяжести» и «центр масс».

$$x_C = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{L}; \quad y_C = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{L}.$$

Из формулы для y_C следует, что $L \cdot y_C = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$, откуда, умножив обе части равенства на 2π , получаем

$$2\pi y_C \cdot L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой площадь поверхности, полученной вращением кривой AB вокруг оси Ox (см. формулу (5)), а выражение $2\pi y_C$ в левой части — длину окружности радиуса y_C .

Таким образом, получена следующая теорема.

Первая теорема Гульдена¹⁾. *Площадь поверхности тела, полученного вращением дуги плоской кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, которая расположена в ее плоскости, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести кривой.*

◆ **Пример 13.** Найти площадь боковой поверхности конуса.

Решение. Конус можно представить как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг катета. Пусть данный конус получен вращением прямоугольного треугольника с гипотенузой L и катетом R вокруг другого катета. Введем систему координат так, чтобы ось вращения была осью абсцисс (рис. 94). Очевидно, центр тяжести отрезка находится в его середине. Поэтому центр тяжести образующей конуса — гипотенузы прямоугольного треугольника — описывает окружность радиуса $R/2$. Применяя первую теорему Гульдена, получаем площадь S боковой поверхности конуса: $S = L \cdot 2\pi R/2 = \pi RL$.

◆ **Пример 14.** Найти координаты центра тяжести полуокружности радиуса R с центром в начале координат, лежащей в верхней полуплоскости при условии, что $\rho = 1$ (рис. 95).

Решение. Поскольку полуокружность расположена симметрично относительно прямой $x = 0$, центр тяжести дуги лежит на этой прямой и

¹⁾ Гульден Пауль (1577—1643) — швейцарский математик. Обе приводимые теоремы были известны еще в III в. н. э. выдающемуся греческому математику Паппу.

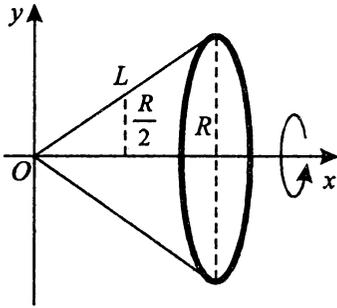


Рис. 94

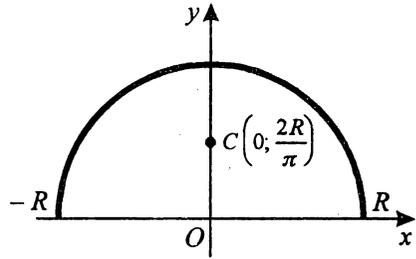


Рис. 95

$x_C = 0$. Площадь S боковой поверхности тела, полученного вращением полуокружности длины $L = \pi R$ вокруг оси Ox , равна $4\pi R^2$. Применяя первую теорему Гульдена, получаем $2\pi y_C \cdot \pi R = 4\pi R^2$, откуда находим $y_C = 2R/\pi$.

Центр тяжести криволинейной трапеции. Аналогично понятию центра тяжести кривой вводится понятие центра тяжести криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Будем предполагать, что: 1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) по этой трапеции равномерно распределены массы так, что их поверхностная масса ρ (масса, приходящаяся на единицу площади) постоянна, и для простоты положим ее равной единице. Тогда масса любой части трапеции будет измеряться ее площадью.

Так как масса всей трапеции равна

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = S,$$

где S — площадь всей трапеции, то координаты центра тяжести трапеции вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{S}; \quad y_C = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{S}.$$

Как и в случае центра тяжести кривой, можно получить для ординаты y_C центра тяжести криволинейной трапеции следующее геометрическое следствие:

$$2\pi y_C \cdot S = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Учитывая, что $2\pi y_C$ — длина окружности радиуса y_C , а $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ —

объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции вокруг оси Ox , получаем следующую теорему.

Вторая теорема Гульдена. Объем тела вращения криволинейной трапеции вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в той же плоскости, равен произведению площади этой трапеции на длину окружности, описанной при этом вращении центром тяжести трапеции.

◆ **Пример 15.** Найти центр тяжести однородной треугольной пластины.

Решение. Введем систему координат Oxy так, как показано на рис. 96, чтобы ее начало находилось в одной из вершин пластины, а другая вершина имела координаты $(1; 0)$; пусть третья вершина имеет координаты $(x; y)$.

Найдем ординату центра тяжести пластины, используя вторую теорему Гульдена. Очевидно, площадь треугольника равна $1/2 \cdot 1 \cdot y = y/2$; объем тела, полученного в результате вращения треугольника OAB вокруг оси Ox , равен сумме объемов конусов, полученных в результате вращения сторон OA и AB соответственно, и равен

$$\frac{1}{3} \pi |AD|^2 \cdot (|OD| + |DB|) = \frac{1}{3} \pi y^2 \cdot 1 = \frac{1}{3} \pi y^2.$$

По второй теореме Гульдена, $2\pi y_C \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{3} \pi y^2$, откуда $y_C = \frac{y}{3}$.

Итак, центр тяжести пластины находится на расстоянии $y/3$ от стороны OB . Аналогично можно показать, что он находится на расстоянии $1/3$ соответствующих высот от других сторон треугольника. Таким образом, центр тяжести треугольной однородной пластины находится в точке пересечения медиан треугольника.

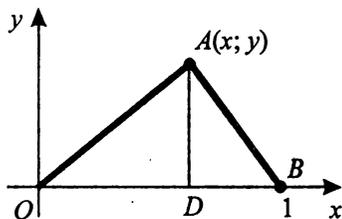


Рис. 96

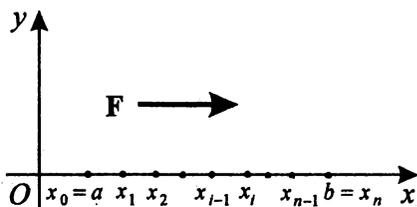


Рис. 97

- **Упражнение.** Найти координаты центра тяжести полукруга с центром в начале координат, лежащего в верхней полуплоскости, при условии, что $\rho = 1$. (Отв. $x_C = 0$, $y_C = \frac{4R}{3\pi}$.)

7. Работа переменной силы. Пусть материальная точка перемещается под действием силы F , направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину, зависящую от x . Требуется определить работу A , совершаемую силой F , по перемещению материальной точки вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$). Функция $F(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$ (рис. 97).

Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ точку ξ_i . Сила, действующая на материальную точку на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, изменяется от точки к точке. Но если длина отрезка мала, то значение силы в точках отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ мало отличается от ее значения в любой точке $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, так как $F(x)$ непрерывна. Поэтому работу A_i , совершаемую силой F на $[x_{i-1}; x_i]$, можно считать приближенно равной работе, совершаемой на том же отрезке постоянной силой $F(\xi_i)$, т. е.

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Рассуждая аналогично для каждого отрезка разбиения, получаем приближенное значение работы A силы F на всем отрезке:

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i.$$

С другой стороны, сумма в правой части равенства является интегральной суммой для функции $F(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $F(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом,

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x) dx. \quad (7)$$

- ◆ **Пример 16.** Определить работу A , необходимую для запуска тела массой m с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h (рис. 98).

Решение. Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Пусть

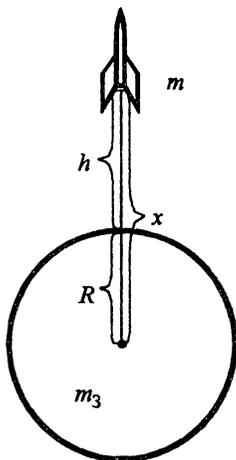


Рис. 98

m_3 — масса Земли. Согласно закону Ньютона,

$$F = G \frac{mm_3}{x^2},$$

где x — расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_3 = k$, получаем $F(x) = k/x^2$, $R \leq x \leq R + h$, где R — радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P = mg$, т. е. $\frac{k}{R^2} = P$, отку-

да $k = PR^2$, и $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$. Таким образом, по формуле (7) получаем

$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

- **Упражнение.** Электрический заряд e_1 , помещенный в начале координат, отталкивает заряд того же знака e_2 из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$). Определить работу A силы F при перемещении заряда e_2 . (Отв. $A = ke_1e_2(1/a - 1/b)$.) (У к а з а н и е. Электрические заряды отталкивают друг друга с силой $F(x) = k \frac{e_1e_2}{x^2}$, где k — постоянная, e_1 и e_2 — величины зарядов, x — расстояние между ними.)

Вопросы для самопроверки

1. Что называется криволинейной трапецией?
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
3. По какой формуле вычисляется площадь криволинейной трапеции?
4. Что такое свойство аддитивности площади?
5. Что называется длиной дуги кривой?
6. По какой формуле вычисляется длина дуги кривой?
7. По какой формуле вычисляется площадь поверхности вращения?
8. С помощью какой формулы вычисляется объем тела вращения?
9. Что такое статические моменты системы материальных точек относительно координатных осей?
10. Что называется центром тяжести системы материальных точек?
11. По каким формулам вычисляется центр тяжести кривой?
12. Сформулируйте первую теорему Гульдена.
13. По каким формулам вычисляется центр тяжести криволинейной трапеции?
14. Сформулируйте вторую теорему Гульдена.
15. Выведите формулу работы переменной силы.

§ 5. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. **Определение 1.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, R]$, т. е. существует определенный интеграл $\int_a^R f(x) dx$ при любом $R > a$. Тогда, если

существует конечный предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx, \quad (1)$$

то его называют **несобственным интегралом первого рода** и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (2)$$

Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

В этом случае говорят, что интеграл (2) существует или сходится. Если же предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (2) не существует или расходится.

Аналогично интегралу (2) вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx. \quad (3)$$

Наконец, как сумму интегралов вида (2) и (3) можно определить несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c — любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

◆ **Пример 1.** Исследовать сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2},$$

т. е. данный интеграл сходится.

◆ **Пример 2.** Исследовать сходимость $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$.

Решение. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \cos x \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin R,$$

но предел функции $\sin R$ при $R \rightarrow +\infty$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

◆ **Пример 3.** Исследовать сходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx$.

Решение. Полагая $c = 0$, по определению имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx = \int_{-\infty}^0 e^x \, dx + \int_0^{+\infty} e^x \, dx;$$

интеграл расходится, так как

$$\int_0^{+\infty} e^x \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^x \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} (e^R - 1) = \infty.$$

◆ **Пример 4.** Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, α — некоторое число.

Решение. 1) Если $\alpha \neq 1$, то для любого $R > 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то для любого $R > 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln R = \infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Заметим, что в рассмотренных примерах вычисление несобственного интеграла было основано на его определении.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$.

Точку $x = b$ будем называть особой, если функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности этой точки, но ограничена¹⁾ на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, заключенном в $[a, b)$. Пусть на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т. е. существует определенный интеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \text{ при любом } \varepsilon > 0 \text{ таком, что } b - \varepsilon > a. \text{ Тогда, если существует}$$

эт конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad (4)$$

то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

В этом случае говорят, что интеграл (5) существует или сходится. Если же предел (4) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (5) не существует или расходится.

Аналогично, если $x = a$ — особая точка, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a, b]$, то при условии, существования обоих интегралов справа по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Наконец, если a и b — особые точки, то если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма

¹⁾ Функция $f(x)$ называется ограниченной на отрезке $[a, b]$, если существует число $M > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. Например, функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\sin x| \leq 1$ при любом x , а функция $f(x) = 1/x$ не является ограниченной на интервале $(0, 1)$, так как не существует числа M такого, что для любого $x \in (0, 1)$ выполняется неравенство $1/x \leq M$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

где c — любая точка из (a, b) .

◆ **Пример 5.** Исследовать сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не ограничена в окрестности точки $x=1$, т. е. «обращается в бесконечность». Поэтому точка $x=1$ особая. На любом же отрезке $[0, 1-\varepsilon]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно интеграл сходится.

◆ **Пример 6.** Исследовать сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ — некоторое число.

Решение. 1) Если $\alpha \neq 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{при } \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

3. Признак сходимости несобственных интегралов.

Теорема 3.5 (признак сравнения несобственных интегралов).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{6}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (7)$$

а из расходимости интеграла (7) следует расходимость интеграла (6).

◆ **Пример 7.** Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)}$ с функцией $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на $[1, +\infty)$. Очевидно, что

$$\frac{1}{x^2(1+x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha = 2 > 1$ (см. пример 4). Следовательно, согласно признаку сравнения, сходится и данный интеграл.

◆ **Пример 8.** Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Решение. Сравняя подынтегральную функцию $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ с функцией $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $[1, +\infty)$, имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

Но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ расходится, так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ (см. пример 4). Следовательно, согласно признаку сравнения и данный интеграл расходится.

З а м е ч а н и е. Аналогичный признак сравнения для несобственных интегралов второго рода можно сформулировать следующим образом: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $(a, b]$ и для всех точек x в некотором интервале $(a, a + \varepsilon)$ выполняются условия $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из

сходимости интеграла $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x) dx$.

● **Упражнения.** Исследовать сходимость:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. (Отв. 1.)

2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$. (Отв. $\frac{1}{2}$.)

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$. (Отв. $\ln 2$.)

4. $\int_0^{+\infty} \arctg x dx$. (Отв. Расходится.)

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx$. (Отв. Расходится.)

6. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$. (Отв. Расходится.)

7. $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$. (Отв. -1.)

8. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. (Отв. $\frac{\pi}{2}$.)

9. $\int_0^{\pi/4} \ctg x dx$. (Отв. Расходится.)

10. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$. (Отв. 0.)

11. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. (Отв. Расходится, так как $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{x}$, а $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.)

12. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$. (Отв. Сходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$, а $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ сходится (см. задачу 1).)

13. $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}}$. (Отв. Расходится, так как при $x > 1$ $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} > \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}$, а

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2}}$ расходится.)

$$14. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}. \text{ (Отв. } \frac{\pi}{2} \text{.) Указание. Оба предела интегрирования}$$

бесконечны, поэтому предварительно разбить интеграл на два. Вместо точки $x = 0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую точку оси Ox .)

$$15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}. \text{ (Отв. } \frac{\pi\sqrt{5}}{5} \text{.)}$$

4. Пример использования несобственного интеграла. Вычислим вторую космическую скорость тела, т. е. начальную скорость, при которой оно способно выйти из поля притяжения Земли в межпланетное пространство.

Ранее (см. § 4, п. 7, пример 16) с помощью определенного интеграла была вычислена работа, необходимая для запуска тела массой m с поверхности Земли на высоту h :

$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = \frac{PRh}{R+h}.$$

Выход тела в межпланетное пространство означает запуск его на бесконечную высоту ($h = \infty$). Вычислим необходимую для этого работу:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A = \int_R^{\infty} F(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{PRh}{R+h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{PR}{1 + R/h} = PR = mgR,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения у поверхности Земли (трение и притяжение других планет при этом не учитываются). Эта работа совершается за счет изменения кинетической энергии тела. Поэтому кинетическая энергия тела в начальный момент должна быть не меньше этой работы, т. е. начальная скорость тела v должна быть такая, чтобы

$$\frac{mv^2}{2} \geq mgR \text{ или } v \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6400000} \text{ м/с} =$$

$$= 11,2 \cdot 8000 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Если начальная скорость тела равна 11,2 км/с, то его траектория движения представляет собой параболу. При начальной скорости, большей 11,2 км/с, траектория будет представлять собой гиперболу, а при начальной скорости, меньшей 11,2 км/с, тело будет двигаться по эллиптической траектории, при этом либо упадет на Землю, либо станет искусственным спутником Земли.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение несобственного интеграла первого рода.
2. В каком случае несобственный интеграл первого рода сходится?
3. Если оба предела интегрирования бесконечны, то какое число можно взять в качестве промежуточного предела интегрирования?
4. Дайте определение несобственного интеграла второго рода.
5. Приведите примеры ограниченной и неограниченной функций, нарисуйте их графики.
6. В каком случае несобственный интеграл второго рода сходится?
7. Сформулируйте признак сходимости несобственных интегралов.
8. С помощью несобственного интеграла первого рода вычислите вторую космическую скорость.

§ 6. Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических и технических задач приходится находить определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это привело к необходимости вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов. Познакомимся с двумя из них: *формулой трапеций* и *формулой Симпсона*.

1. Формула трапеций.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\},$$

где $f(a) = f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n) = f(b)$ — равноотстоящие ординаты функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Погрешность формулы трапеций не больше чем

$$k \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где k — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

◆ **Пример 1.** Вычислить по формуле трапеций для $n=10$ интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Полученный результат сравнить с точным.

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, ..., $x_9 = 0,9$, $x_{10} = 1$. Вычислим приближенно значения функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ в этих точках: $f(0) = 1,0000$, $f(0,1) = 0,9091$,

$$f(0,2) = 0,8333, \quad f(0,3) = 0,7692, \quad f(0,4) = 0,7143, \quad f(0,5) = 0,6667, \\ f(0,6) = 0,6250, \quad f(0,7) = 0,5882, \quad f(0,8) = 0,5556, \quad f(0,9) = 0,5263, \\ f(1) = 0,5000.$$

По формуле трапеций получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10} \left(\frac{1,0000 + 0,5000}{2} + 0,9091 + 0,8333 + 0,7692 + 0,7143 + 0,6667 + \right. \\ \left. + 0,6250 + 0,5882 + 0,5556 + 0,5263 \right) = 0,69377 \approx 0,6938.$$

Оценим погрешность полученного результата. Так как $f(x) = 1/(1+x)$, то $f'(x) = -1/(1+x)^2$, $f''(x) = 2/(1+x)^3$. На отрезке $[0, 1]$ имеем $|f''(x)| \leq 2$. Поэтому погрешность полученного результата не превосходит величины

$$\frac{k(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12 \cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0,0017.$$

Вычислим точное значение данного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315.$$

Абсолютная ошибка результата, полученного по формуле трапеций, меньше 0,0007. Это находится в соответствии с данной выше оценкой погрешности.

Во многих технических задачах эта точность достаточна. Если увеличить число n , то точность будет большей.

- **Упражнение.** Вычислите по формуле трапеций для $n = 10$ интеграл

$$I = \int_0^4 x^2 dx \text{ полученный результат сравните с точным. (Отв. } I \approx 21,44.)$$

2. Формула Симпсона.¹⁾

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}),$$

или в развернутом виде

¹⁾ Симпсон Томас (1710—1761) — английский математик.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})].$$

Погрешность формулы Симпсона не больше чем

$$M \frac{(b-a)^5}{2880n^4},$$

где M — наибольшее значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Выше отмечалось, что погрешность формулы трапеций оценивается числом $k \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ ($k = \max_{[a,b]} |f''(x)|$).

Так как n^4 растет быстрее, чем n^2 , то погрешность формулы Симпсона с ростом n уменьшается значительно быстрее, чем погрешность формулы трапеций. Этим и объясняется, что формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций.

Для сравнения точности приближенных формул вычислим еще раз интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, но теперь по формуле Симпсона при $n=4$. Разобьем

отрезок $[0, 1]$ на четыре равные части точками $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$ и вычислим приближенно значения функции $f(x) = 1/(1+x)$ в этих точках $y_0 = 1,0000$, $y_1 = 0,8000$, $y_2 = 0,6667$, $y_3 = 0,5714$, $y_4 = 0,5000$.

По формуле Симпсона получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} &\approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)] = \\ &= \frac{1-0}{12} [1,0000 + 0,5000 + 2 \cdot 0,6667 + 4(0,8000 + 0,5714)] \approx 0,69325. \end{aligned}$$

Оценим погрешность полученного результата. Для подынтегральной функции $f(x) = 1/(1+x)$ имеем: $f^{(4)}(x) = 24/(1+x)^5$, откуда следует, что на отрезке $[0, 1]$ $|f^{(4)}(x)| \leq 24$. Следовательно, можно взять $M = 24$, и погрешность результата не превосходит величины $24/(2880 \cdot 4^4) < 0,0004$. Сравнивая приближенное значение с точным, заключаем, что абсолютная ошибка результата, полученного по формуле Симпсона, меньше 0,00011. Это находится в соответствии с данной выше

оценкой погрешности и, кроме того, свидетельствует, что формула Симпсона значительно точнее формулы трапеций. Поэтому формулу Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов используют чаще, чем формулу трапеций.

- **Упражнение.** Вычислите по формуле трапеций $n = 10$, а по формуле Симпсона $2n = 8$ интеграл $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Полученные результаты сравните с точным. (Отв. По формуле трапеций $I \approx 0,69377$; по формуле Симпсона, $I \approx 0,69315$.)

Вопросы для самопроверки

1. Чем вызвана необходимость вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов?
2. Объясните, почему формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций?

§ 7. Контрольные задачи

- В задачах 3.1—3.3 надо вычислить указанные интегралы.

$$3.1. \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx. \quad 3.2. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}. \quad 3.3. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

- 3.4. Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx$, не находя первообразной подынтегральной функции.

- В задачах 3.5—3.7 требуется найти площади фигуры, ограниченной указанными линиями.

- 3.5. Парабола $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательные к ней, проведенные через точки $(0; -3)$ и $(3; 0)$.
- 3.6. Синусоида $y = \sin x$ и парабола $y = x^2 - \pi x$.
- 3.7. Линия $y = |x| + 1$, прямые $y = 0$, $x = -2$ и $x = 1$.
- 3.8. Шаровым слоем называется тело, получаемое при вращении криволинейной трапеции, ограниченной дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, прямыми $x = a$ и $x = b$ ($-R < a < b < R$) и осью Ox , вокруг оси Ox (рис. 99). Найдите объем

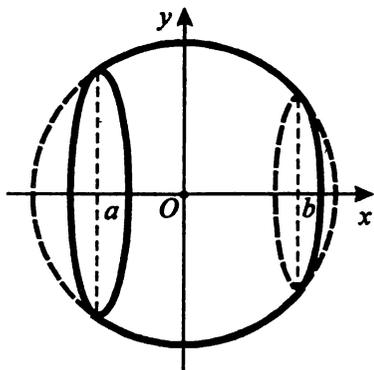


Рис. 99

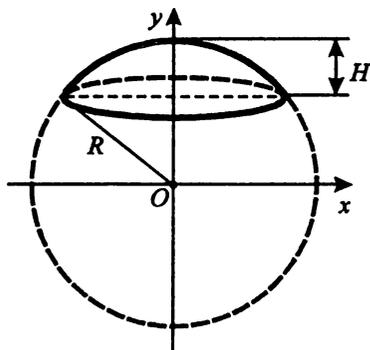


Рис. 100

шарового слоя, вырезаемого из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ плоскостями $x = 2$ и $x = 3$.

3.9. *Шаровым сегментом* называется тело, полученное при вращении дуги окружности вокруг диаметра окружности, перпендикулярного хорде, стягивающей концы дуги. Найдите объем шарового сегмента, зная радиус окружности R и высоту H сегмента — длину участка оси вращения, находящуюся внутри сегмента (рис. 100).

3.10. *Шаровым сектором* называется тело, полученное при вращении кругового сектора вокруг одного из его граничных радиусов. Найдите объем шарового сектора, зная радиус шара R и высоту сектора H (рис. 101).

● В задачах 3.11, 3.12 найти: а) площадь фигуры, ограниченной заданными линиями; б) объем тела, полученного вращением этой фигуры вокруг оси Ox .

3.11. Параболы $x = 1 - 3y^2$ и $x = -2y^2$.

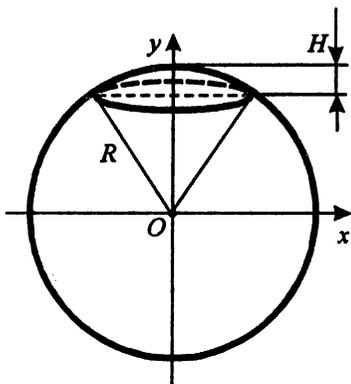


Рис. 101

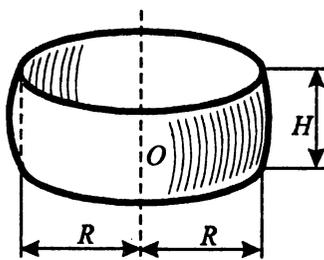


Рис. 102

3.12. Кривая $y = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$ и прямые $y = 0$, $x = 0$ и $x = \pi/2$.

3.13. Найти длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$, где $x \in [0, 4]$.

3.14. Заданы: парабола $y = x^2$ и прямые $y = 0$, $x = a$, где $a > 0$. Найдите: а) площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми; б) объем; в) площадь поверхности тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox . При вычислении площади поверхности считать сначала $0 < b \leq x \leq a$, а затем устремить b к 0.

● В задачах 3.15, 3.16 с помощью теорем Гульдена и соображений симметрии найти центры тяжести указанных материальных тел.

3.15. Дуга окружности радиуса R , стягивающая центральный угол величины 2α .

3.16. Круговой сектор с углом 2α между ограничивающими его радиусами величины R .

3.17. Тором называется тело, полученное вращением круга вокруг непересекающей его оси («бублик»). Найдите: а) объем тора; б) площадь поверхности тора, полученного вращением круга $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ вокруг оси Oy .

3.18. Ювелиру заказано золотое колечко шириной H , имеющее форму тела, ограниченного сферой с центром O и поверхностью цилиндра радиуса R , ось которого проходит через точку O (рис. 102). Мастер сделал такое колечко, но выбрал R слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если R нужно увеличить в m раз, а ширину H оставить прежней (удельный вес золота считается известным)?

Ответы, решения к контрольным задачам

1.1. $x \geq 5$.

Решение. Равенство $|x+y|=|x|+|y|$ справедливо только тогда, когда x и y имеют одинаковый знак. Так как $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$ при любых значениях x , то данное равенство справедливо для тех значений x , при которых $x-5 \geq 0$, отсюда $x \geq 5$.

1.2. $x = -\pi/2 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Решение. Данное равенство справедливо для тех значений x , для которых $\sin x < 0$. Поэтому имеем: $-\sin x - \sin x = 2$, или $\sin x = -1$, отсюда $x = -\pi/2 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1.3. $|x| \geq \sqrt{3}$.

Решение. Равенство $|x-y|=|x|-|y|$ справедливо только тогда, когда x и y имеют одинаковый знак и $|x| \geq |y|$. В данном случае равенство справедливо для тех значений x , при которых $x^4 - 4 \geq x^2 + 2$, или $x^2 - 2 \geq 1$, отсюда $|x| \geq \sqrt{3}$.

1.4. 1) $x = 0$; 2) $x = 2/5$ и $x = 2$; 3) $x = 1/2$.

1) **Решение.** Имеем

$$|x+4| = \begin{cases} (x+4), & \text{если } x \geq -4, \\ -(x+4), & \text{если } x < -4, \end{cases}$$
$$|x-4| = \begin{cases} (x-4), & \text{если } x \geq 4, \\ -(x-4), & \text{если } x < 4. \end{cases}$$

Следовательно, при $x < -4$ получаем $-(4+x) = -(x-4)$, отсюда $8 = 0$ — неверное равенство — решений нет; при $-4 \leq x < 4$ получаем $(x+4) = -(x-4)$, откуда $x = 0$; при $x \geq 4$ имеем $x+4 = x-4$, откуда $8 = 0$ — неверное равенство — решений нет. Таким образом, $x = 0$ — решение данного уравнения¹⁾.

2) **Решение.** Имеем

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \geq 1, \\ -(x-1), & \text{если } x < 1, \end{cases} \quad |1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & \text{если } x \leq 1/2, \\ -(1-2x), & \text{если } x > 1/2, \end{cases}$$
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

¹⁾ Здесь использован специальный прием — «метод интервалов».

Следовательно, при $x < 0$ получаем $-(x-1)+1-2x = -2x$, откуда $x = 2$ — решений нет, так как $2 \notin (-\infty, 0)$; при $0 \leq x \leq 1/2$ получаем $-(x-1)+1-2x = 2x$, откуда $x = 2/5$ — решение уравнения, так как $2/5 \in [0, 1/2]$; при $1/2 < x < 1$ получаем $-(x-1)-(1-2x) = 2x$, откуда $x = 0$ — решений нет; при $1 \leq x < +\infty$ имеем $x-1-(1-2x) = 2x$, откуда $x = 2$ — решение уравнения. Таким образом, $x = 2/5$ и $x = 2$ — решения данного уравнения.

3) Р е ш е н и е. Имеем: а) $|3-2x|-1=2|x|$; б) $|3-2x|-1=-2|x|$.

а)

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & \text{если } x \leq 3/2, \\ -(3-2x), & \text{если } x > 3/2, \end{cases} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x < 0$ получаем $3-2x-1 = -2x$, откуда $2 = 0$ — неверное равенство — решений нет; при $0 \leq x \leq 3/2$ получаем $3-2x-1 = 2x$, откуда $x = 1/2$ — решение уравнения; при $3/2 < x < +\infty$ имеем $-3+2x-1 = 2x$, откуда $4 = 0$ — неверное равенство — решений нет.

Нетрудно проверить, что в случае б) уравнение не имеет решения. Таким образом, $x = 1/2$ — решение данного уравнения.

1.5. $x < 0$ или $0 < x < 3$.

Р е ш е н и е. Неравенство $|a-b| > |a|-|b|$ справедливо тогда, когда: 1) числа a и b разных знаков; 2) когда $|a| < |b|$. В случае 1), так как $x^2 > 0$, то неравенство имеет место для значений x , при которых $3x < 0$, т. е. для $x < 0$. В случае 2) неравенство выполняется для тех значений x , для которых $x^2 < 3x$ или $x^2 - 3x < 0$, $x(x-3) < 0$. Возможны два случая: либо $\begin{cases} x < 0, \\ x-3 > 0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x > 0, \\ x-3 < 0. \end{cases}$ Первая

система не имеет решений, а вторая имеет решение $0 < x < 3$. Таким образом, получаем ответ $x < 0$ или $0 < x < 3$.

1.6. $x < -4$ или $x > 4$.

1.7. Р е ш е н и е. Имеем: 1) при $n = 1$ утверждение верно, так как $4^1 = 4 > 1 = 1^2$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого n , докажем, что $4^{n+1} > (n+1)^2$. Действительно, так как $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n > 4n^2$, а $n^2 \geq n$ и $n^2 \geq 1$, то $4n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Окончательно получаем $4^{n+1} > (n+1)^2$, что и требовалось доказать.

1.8. Р е ш е н и е. Имеем: 1) при $n = 4$ утверждение верно, поскольку $4! = 24 > 16 = 2^4$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого $n > 4$, докажем, что $(n+1)! > 2^{n+1}$. Действительно, $(n+1)! = n!(n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, так как $n+1 > 2$ при $n \geq 4$. Окончательно получаем $(n+1)! > 2^{n+1}$, что и требовалось доказать.

- 1.9. Решение. Имеем: 1) при $n=2$ утверждение верно. В самом деле, $\sqrt{2} < 1 + 1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ или $2 < \sqrt{2} + 1 < 4$. Это верно, поскольку $1 < \sqrt{2} < 2$; 2) предполагая верность данного утверждения для некоторого $n > 2$, докажем, что

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Для того, чтобы доказать справедливость неравенства

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

достаточно показать, что

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Это действительно верно, так как

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow n+1 < \sqrt{n(n+1)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 < (\sqrt{n(n+1)})^2 = n^2 + n \Leftrightarrow 0 < n,$$

что очевидно при $n \geq 2$. Аналогично, чтобы доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1},$$

достаточно показать, что

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Это неравенство верно, поскольку

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1.$$

Таким образом, данное утверждение доказано.

1.10. $1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

Решение. Обозначим искомую сумму через S_n . Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \dots + \frac{n^2+n}{2} = \\ &= \frac{1^2+2^2+\dots+n^2+1+2+\dots+n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} = \end{aligned}$$

¹⁾ Знак \Leftrightarrow означает равносильность. Например, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из A следует B и, наоборот, из B следует A .

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

З а м е ч а н и е. Формула $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ доказана в § 4

(см. пример 1), а формулу $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ вы должны были доказать самостоятельно.

$$1.11. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим искомую сумму через S_n и представим

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \text{ в виде } \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots - \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в том, что сумма определена правильно, воспользуемся методом математической индукции. Имеем:

1) при $n=1$ утверждение верно, так как

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6};$$

2) допустим, что для некоторого n верно равенство

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)};$$

тогда

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2n+3-2}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, методом математической индукции мы подтвердили справедливость

искомой формулы $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

$$2.1. \quad x = \pm \sqrt{2/3}.$$

Р е ш е н и е. Так как касательная параллельна прямой $y = x$, ее угловой коэффициент равен 1 — угловому коэффициенту этой прямой. С другой стороны, угловой коэффициент касательной в точке x_0 равен $f'(x_0)$.

Итак, надо найти, при каких значениях x верно равенство $f'(x)=1$. Поскольку $f(x)=x^3-x$, $f'(x)=3x^2-1$, получаем уравнение $3x^2-1=1$. Отсюда $x=\pm\sqrt{2/3}$.

2.2. -45° .

Решение. Искомый угловой коэффициент равен значению производной функции в точке $x=0$ (точке пересечения графика с осью Oy). Так как $f(x)=2x^3-x$, то $f'(x)=6x^2-1$ и $f'(0)=-1$.

2.3. $45^\circ; 0^\circ; -45^\circ$.

Решение. Искомые угловые коэффициенты равны значениям производной в точках 0; 2; 4. Так как $f(x)=\frac{4x-x^2}{4}$, то $f'(x)=\frac{4-2x}{4}$. Соответственно имеем: $f'(0)=1$; $f'(2)=0$; $f'(4)=-1$.

2.4. $y=x+1$.

Решение. Точки пересечения с осью абсцисс находятся из условия $y_0=0$, т. е. $(x_0^3+1)/3=0$. Отсюда $x_0=-1$. Уравнение касательной, проходящей через точку графика $(x_0; y_0)$, имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Так как $f(x)=\frac{x^3+1}{3}$, то $f'(x)=x^2$ и $f'(x_0)=1$. Получаем уравнение касательной: $y=x+1$.

2.5. -45° .

Решение. Искомый угловой коэффициент равен значению производной при $x=1$. Так как $f(x)=\frac{1}{x}$, то $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ и $f'(1)=-1$.

2.6. $a=4$.

Решение. Точки пересечения кривой с осью абсцисс находим из уравнения $\frac{ax_0-x_0^3}{4}=0$; отсюда $x_0=0$ или (при $a \geq 0$) $x_0=\pm\sqrt{a}$. Угловые коэффициенты в этих точках равны $f'(x_0)$. Так как $f(x)=(ax-x^3)/4$, то $f'(x)=(a-3x^2)/4$. Отсюда $f'(0)=a/4$ или (при $a \geq 0$) $f'(\pm\sqrt{a})=-a/2$.

По условию, $f'(x_0)=1$. Значит, $a=4$ или (при $a \geq 0$) $a=-2$. Значение $a=-2$ не подходит.

2.7. Прямая $y=3x-4$ является касательной к кривой $y=x^3-2$.

Решение. Если прямая $y=3x-4$ — касательная к кривой $y=x^3-2$ в точке $(a; a^3-2)$, то $f'(a)=3$. Отсюда $3a^2=3$, следовательно, $a=\pm 1$. Касательная, проходящая через точку кривой с абсциссой a , имеет уравнение $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. При $a=1$ получаем $y+1=3(x-1)$, откуда $y=3x-4$.

2.8. $y = -x + 2$; $y = -9x - 6$.

Решение. Уравнение касательной, проходящей через точку гиперболы $(a; 1/a)$, $y - 1/a = f'(a)(x - a)$. Так как $f(x) = 1/x$, то $f'(x) = -1/x^2$ и $f'(a) = -1/a^2$. Итак, уравнение касательной имеет вид $y - 1/a = -(1/a^2)(x - a)$, откуда

$$y = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}. \quad (*)$$

По условию, эта прямая проходит через точку $(-1; 3)$, т. е. $3 = 1/a^2 + 2/a$. Отсюда $3a^2 - 2a - 1 = 0$, значит, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$. Подставляя эти значения в (*), получаем ответ.

2.9. $y = x + 10$.

Решение. Пусть искомая прямая проходит через точку $(a; 8 - 3a - 2a^2)$ на первой параболе. Общее уравнение касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Так как $f(x) = 8 - 3x - 2x^2$, то $f'(x) = -3 - 4x$ и $f'(a) = -3 - 4a$. Таким образом, данная прямая имеет уравнение $y = 8 - 3a - 2a^2 - (3 + 4a)(x - a)$, т. е. $y = -(4a + 3)x + 2a^2 + 8$. Предположим теперь, что прямая проходит через точку $(b; 2 + 9b - 2b^2)$ на второй параболе. Рассуждая аналогично, получаем, что уравнение прямой $y = -(4b - 9)x + 2b^2 + 2$. Полученные два уравнения должны задавать одну и ту же прямую. Следовательно,

$$\begin{cases} 4a + 3 = 4b - 9, \\ 2a^2 + 8 = 2b^2 + 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $a = -1$. Таким образом, уравнение искомой прямой $y = x + 10$.

2.10. $a = 0$; $b = 1/4$.

Решение. Уравнение касательной к параболе в точке $(c; c^2 + ac + b)$ такое: $y = c^2 + ac + b + f'(c)(x - c)$, причем $f'(x) = 2x + a$, т. е. $f'(c) = 2c + a$. Поэтому уравнение касательной $y = (a + 2c)x + b - c^2$.

Если касательной является прямая $y = -x$, то получаем

$$\begin{cases} a + 2c = -1, \\ b - c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-(a+1)}{2}, \\ c^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = b \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 4b. \quad (**)$$

Во втором случае касательная — прямая $y = 5x - 6$. Тогда

$$\begin{cases} a + 2c = 5, \\ b - c^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{5-a}{2}, \\ c^2 = b + 6 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 10a + 1 = 4b. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем систему

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 = 4b, \\ a^2 - 10a + 1 = 4b. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $a = 0$ и $b = 1/4$.

2.11. $x = 0$ и $x = 4$.

Решение. Приведем уравнение окружности к простейшему виду: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$, откуда $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Таким образом, центр окружности — точка $(2; 0)$ — лежит на оси абсцисс. Поэтому касательные к окружности в точках пересечения с осью абсцисс вертикальные. Так как радиус равен 2, то эти касательные проходят через точки $(0; 0)$ и $(4; 0)$.

2.12. $v = 55$ м/с, $a = 26$ м/с².

Решение. Сначала найдем скорость движения s' как функцию t , а потом вычислим $s'(5)$. Имеем

$$v(t) = s'(t) = (t^3 - 2t^2 + 4)' = 3t^2 - 4t.$$

При $t = 5$, получаем $v(5) = s'(5) = 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 = 55$.

Теперь найдем ускорение движения s'' как функцию t , а затем вычислим $s''(5)$:

$$a(t) = s''(t) = (3t^2 - 4t)' = 6t - 4; \quad a(5) = s''(5) = 6 \cdot 5 - 4 = 26.$$

Итак, скорость $v = 55$ м/с; ускорение $a = 26$ м/с².

2.13. Решение. Находим мгновенные скорости точек в момент времени t : $v_1(t) = s_1'(t) = 2t$; $v_2(t) = s_2'(t) = 8t^3$. Отсюда получаем $v_1(0) = v_2(0)$, $v_1(1/2) = v_2(1/2)$; $v_1(t) > v_2(t)$ при $0 < t < 1/2$, $v_1(t) < v_2(t)$ при $t > 1/2$. Средняя скорость первой

точки на промежутке $0 \leq t \leq 1$ равна $v_{1\text{cp}} = \frac{s_1(1) - s_1(0)}{1} = 1$, второй точки —

$$v_{2\text{cp}} = \frac{s_2(1) - s_2(0)}{1} = 2. \quad \text{Таким образом, } v_{1\text{cp}} < v_{2\text{cp}}.$$

2.14. Решение. 1) Пользуясь правилом дифференцирования произведения и формулами производных, получаем

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \sqrt{1-x} + x (\sqrt{1-x})' = 1 \cdot \sqrt{1-x} + x \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = \\ &= \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

2) Пользуясь правилами дифференцирования произведения, частного и формулами производных, получим

$$f'(x) = \frac{(x^2 \sin x)' \ln x - x^2 \sin x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{(x^2 \cos x + 2x \sin x) \ln x - x^2 \sin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x(x \cos x + 2 \sin x) \ln x - x \sin x}{\ln^2 x}.$$

3) Пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, частного и формулами производных, имеем

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2(1+x^2)}} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},$$

т. е.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{при } |x| < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

При $|x| = 1$ производной не существует.

2.15. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h = 2R.$

Решение. Запишем формулы для объема банки и площади ее поверхности:

$$V = \pi R^2 \cdot h, S = 2\pi R^2 + 2\pi R h.$$

Выражая высоту банки h через радиус $h = \frac{V}{\pi R^2}$ и подставляя полученное выражение в формулу для поверхности, получаем

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, 0 < R < +\infty.$$

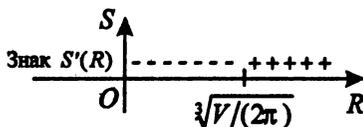
Таким образом, задача о «наилучшей» консервной банке сводится к определению такого значения R , при котором достигает своего наименьшего значения функция $S(R)$. Вычислим производную функции $S(R)$:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V).$$

Решая уравнение

$$\frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V) = 0,$$

получаем точку возможного экстремума $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Исследуем знак производной в окрестности этой точки (рис. 103).



При $0 < R < \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ производная отрицательна и функция $S(R)$ убывает, при $\sqrt[3]{V/(2\pi)} < R < +\infty$ производная положительна и функция $S(R)$ возрастает. Следовательно, $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ — точка локально-

Рис. 103

го минимума, $S(\sqrt[3]{V/(2\pi)}) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ — минимальное значение функции в этой точке.

Итак, радиус и высота банки, наилучшие с точки зрения условия минимальности $S(R)$, определяются формулами $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2R$, т. е. высота «наилучшей» банки равна ее диаметру.

3.1. $4\pi/3 + \sqrt{3}$.

Решение. Применим подстановку $x = \varphi(t) = 2\sin t$, считая, что $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$. Функция $\varphi(t) = 2\sin t$ на отрезке $[-\pi/3; \pi/3]$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, так как она непрерывно дифференцируема, монотонна и $\varphi(-\pi/3) = -\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3) = \sqrt{3}$. Заметим, что $\sqrt{4-x^2} = 2|\cos t| = 2\cos t$ ($|\cos t| = \cos t$, так как при $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$ в I и IV четверти, $\cos t > 0$), $\varphi'(t) = 2\cos t$. Поэтому

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

3.2. $32/3$.

Решение. Сделаем подстановку $t = \sqrt{1+x}$. Выразив отсюда x , получим, что $x = \varphi(t) = t^2 - 1$; так как $t = 2$ при $x = 3$, а при $x = 8$ имеем $t = 3$, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[2, 3]$. Поскольку функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной, получаем

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \frac{32}{3}.$$

3.3. $\sqrt{3}/32$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $x = g(t) = \frac{2}{\cos t} = 2 \sec t$, где $0 \leq t \leq \pi/3$. Тогда $g'(t) = 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t}$. Поскольку функция $x = g(t)$ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi/3]$ всем условиям теоремы о замене переменной,

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t dt. \quad (*)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, заметим, что если в формуле замены пе-

ременной $\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt$ в интеграле слева положить $f(x) = x^2$, а $x = \varphi(t) = \sin t$, то

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t) = \sin^2 t \cos t,$$

т. е. подынтегральная функция в интеграле в правой части равенства (*) равна $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Поэтому, используя формулу замены переменной справа налево, получим

$$\frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}/2} u^2 du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

3.4. 0.

Решение. В силу формул приведения, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Поэтому $\sqrt[3]{\cos(\pi - x)} = -\sqrt[3]{\cos x}$, и фигуры, имеющие площади S_1 и S_2 (рис. 104), симметричны относительно точки $\pi/2$ на оси абсцисс, значит, $S_1 = S_2$. С другой стороны, используя свойство 5° определенного интеграла, имеем

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx.$$

Поскольку $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x} dx = S_1$, а $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx = -S_2$, получаем

$$\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\cos x} dx = S_1 - S_2 = 0.$$

3.5. $S = 9/4$.

Решение. Убедимся в том, что данные точки лежат на параболе:

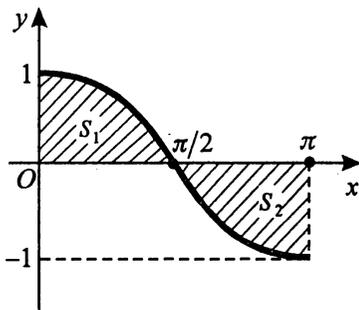


Рис. 104

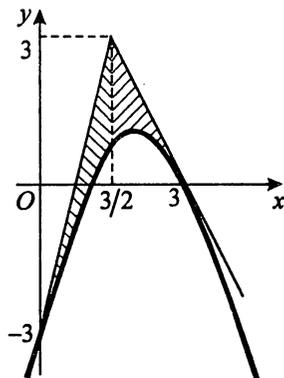


Рис. 105

$-3 = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3$; $0 = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3$. Найдем уравнения касательных. Подставляя в уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

сначала $x_0 = 0$, $f(x_0) = -3$ и $f'(x_0) = -2x_0 + 4 = 4$, а затем $x_0 = 3$, $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) = -2$, получаем $y = 4x - 3$ и $y = -2x + 6$. Находим точку пересечения касательных:

$$\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Найдем площадь полученной фигуры (рис. 105):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{3/2} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{3/2}^3 [(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3)] dx = \\ &= \int_0^{3/2} x^2 dx + \int_{3/2}^3 (x - 3) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{3/2} + \left. \frac{(x-3)^3}{3} \right|_{3/2}^3 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

3.6. $S = 2 + \pi^3/6$.

Решение. Заметив, что $x = 0$ и $x = \pi$ — корни функции $y = x^2 - \pi x$, и построив графики данных линий — синусоиду и параболу (рис. 106), находим площадь S заданной фигуры:

$$\begin{aligned} S' &= \int_0^{\pi} [\sin x - (x^2 - \pi x)] dx = \int_0^{\pi} (\sin x - x^2 + \pi x) dx = \\ &= \left[-\cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \left[\left(1 - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} \right) - (-1) \right] = 2 + \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

3.7. $S = 11/2$.

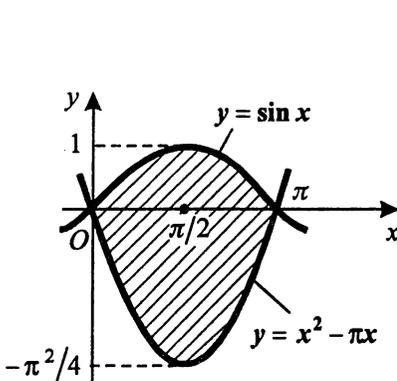


Рис. 106

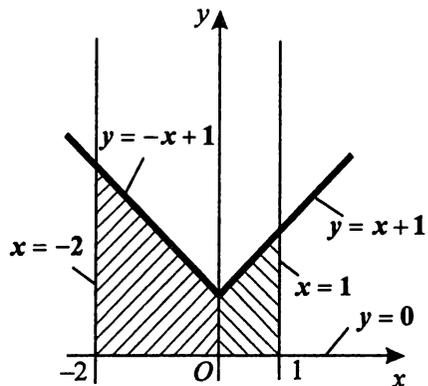


Рис. 107

Решение. Так как $y = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \in [0; +\infty), \\ -x + 1 & \text{при } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$

то, разбивая данную фигуру на две части (рис. 107), найдем площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (-x+1) dx + \int_0^1 (x+1) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \\ &= [0 - (-(-2)^2/2 + (-2))] + [(1/2 + 1) - 0] = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

3.8. $V = \frac{29}{3} \pi$.

Решение. Данный шаровой слой можно представить как тело, полученное вращением криволинейной трапеции, которое ограничено линиями $y = \sqrt{16 - x^2}$, $x = 2$, $x = 3$ и осью Ox , вокруг оси Ox (рис. 108). Поэтому, согласно формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx, \text{ для объема } V \text{ этого шарового слоя имеем}$$

$$V = \pi \int_2^3 (16 - x^2) dx = \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{29}{3} \pi.$$

3.9. $V = \frac{\pi H^2}{3} (3R - H)$.

Решение. Шаровой сегмент (см. рис. 100) можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения криволинейной трапеции, образованной дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, прямыми $x = -R$ и $x = -R + H$ и осью Ox , вокруг

оси Ox (рис. 109). Поэтому, согласно формуле $V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$, где V — объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$,

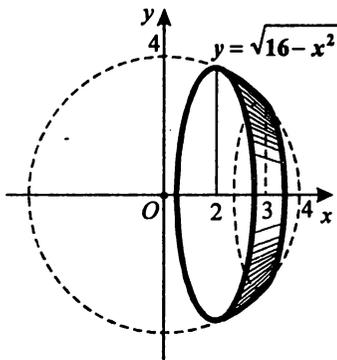


Рис. 108

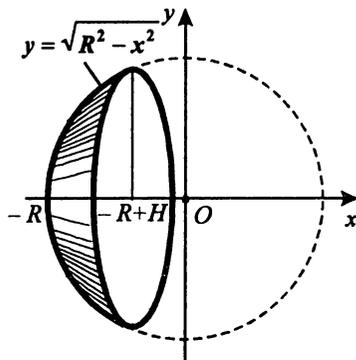


Рис. 109

$a \leq x \leq b$, вокруг оси Ox , объем шарового сегмента можно найти так:

$$V = \pi \int_{-R}^{-R+H} (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{-R+H} = \frac{\pi H^2}{3} (3R - H).$$

З а м е ч а н и е. Формулу объема шарового сегмента можно получить из формулы объема шарового слоя:

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx,$$

если устремить a к $-R$.

3.10. $V = 2\pi R^2 H/3$.

Р е ш е н и е. Объем шарового сектора можно получить, сложив объемы шарового сегмента (см. задачу 3.9) и объема конуса $(1/3)\pi |AB|^2 |OB|$ (рис. 110), получаем, что

$$|AB| = \sqrt{R^2 - (-R + H)^2} = \sqrt{2RH - H^2};$$

$$|OB| = R - H. \text{ Таким образом, для объема шарового сектора}$$

$$V = \frac{\pi H^2 (3R - H)}{3} + \frac{1}{3} \pi (2RH - H^2)(R - H) = \frac{2\pi R^2 H}{3}.$$

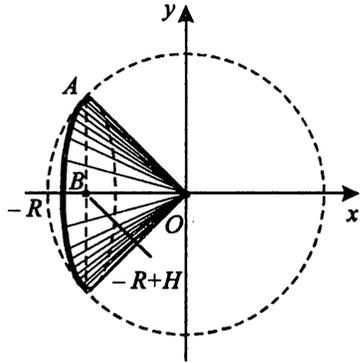


Рис. 110

3.11. а) $S = 4/3$; **б)** $V = \pi/2$.

Р е ш е н и е. а) Ось абсцисс является осью данных парабол. Очевидно, из уравнений парабол получаем, что для первой из них $3y^2 = 1 - x \geq 0$, поэтому $x \leq 1$; аналогично, для второй параболы имеем $x \leq 0$. Найдем дополнительно несколько точек графиков и построим их (рис. 111, а). Отразим симметрично полученные графики относительно прямой $y = x$. Мы получили графики функций $y = 1 - 3x^2$ и $y = -2x^2$ (рис. 111, б). Из уравнения $1 - 3x^2 = -2x^2$ найдем абсциссы точек пересечения полученных графиков: $x = \pm 1$. Воспользовавшись симметрией парабол относительно оси Oy , найдем площадь S искомой фигуры (она равна площади фигуры, изображенной на рис. 111, б, симметричной ей относительно прямой $y = x$):

$$S = \int_{-1}^1 [(1 - 3x^2) - (-2x^2)] dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

б) Найдем абсциссу точек пересечения данных графиков (см. рис. 111, а) из системы уравнений $\begin{cases} x = 1 - 3y^2, \\ x = -2y^2, \end{cases}$ имеем $x = -2$. Объем искомого тела можно най-

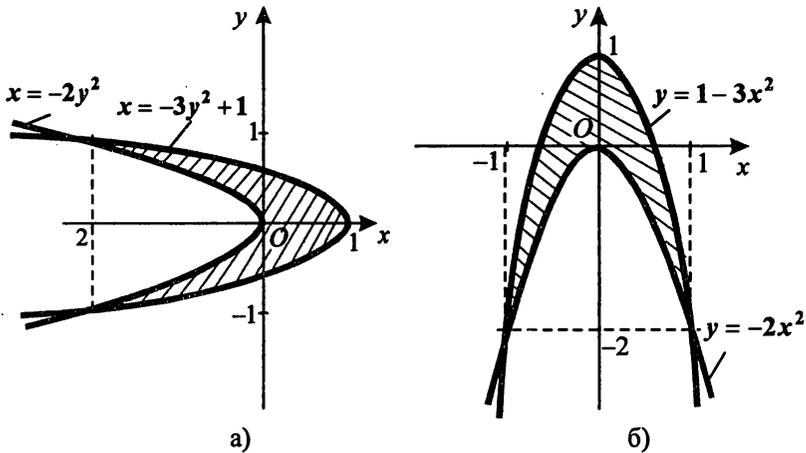


Рис. 111

ти как разность объемов тел, полученных в результате вращения вокруг оси Ox двух криволинейных трапеций. Первая из трапеций образована частью параболы $x = 1 - 3y^2$, расположенной над осью Ox , уравнением этого куска $y = \sqrt{(1-x)/3}$, а также прямыми $x = -2$, $x = 1$ и осью Ox . Вторая трапеция образована параболой $y = \sqrt{-x/2}$, прямыми $x = -2$, $x = 0$ и осью Ox . Находим объем:

$$V = \pi \left[\int_{-2}^1 \left(\frac{1-x}{3} \right) dx - \int_{-2}^0 \left(-\frac{x}{2} \right) dx \right] = \pi \left[\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} \right) \Big|_{-2}^1 + \frac{x^2}{4} \Big|_{-2}^0 \right] = \frac{\pi}{2}.$$

3.12. а) $S = 1$; б) $V = \pi^2/4$.

Решение. а) Поскольку $\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos x$, данная фигура — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$ (рис. 112). Найдем ее площадь:

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

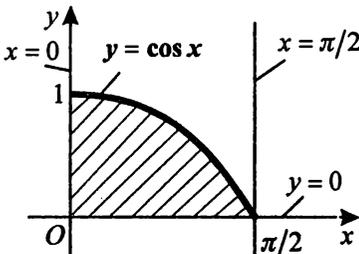


Рис. 112

б) Вычислим объем тела вращения:

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx \right].$$

Для нахождения последнего интеграла можно сделать замену переменной по формуле $x = t/2$. Тогда

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$3.13. L = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Решение. Воспользуемся формулой $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} \, dx$, где L — длина

дуги кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Так как $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, то $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}$.

Длина дуги

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+9x/4} \, dx.$$

После замены $1+9x/4 = t$, т. е. $x = (4t-1)/9$, получаем

$$L = \int_1^{10} \sqrt{t} \cdot \frac{4}{9} \, dt = \frac{4}{9} \int_1^{10} t^{1/2} \, dt = \frac{4}{9} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

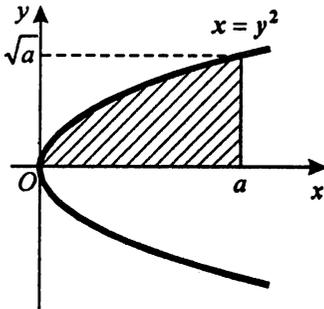
$$3.14. \text{ а) } S = \frac{2a\sqrt{a}}{3}; \text{ б) } V = \frac{\pi a^2}{2}; \text{ в) } S = \frac{4\pi}{3} \left[\left(a + \frac{1}{4} \right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right].$$

Решение. а) Данная фигура заштрихована на рис. 113, а. Она ограничена сверху параболой $y = \sqrt{x}$. Найдем площадь фигуры:

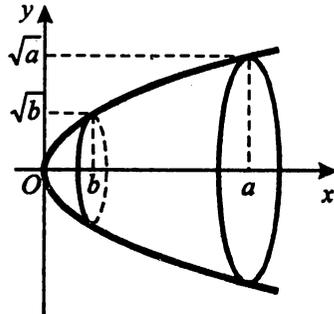
$$S = \int_0^a \sqrt{x} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^a = \frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

б) Находим объем тела вращения V :

$$V = \pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^a x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}.$$



а)



б)

Рис. 113

в) Пусть $b > 0$. Найдем сначала площадь S_b поверхности, полученной в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = \sqrt{x}$, прямыми $x = b$, $x = a$, $y = 0$ (рис. 113, б). Так как $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+1/4x}$. Согласно формуле $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$, где S — площадь поверхности тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, вокруг оси Ox , площадь рассматриваемой поверхности S_b можно найти так:

$$S_b = 2\pi \int_b^a \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_b^a \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2} \Big|_b^a = \frac{4\pi}{3} \left[\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \left(b + \frac{1}{4}\right)^{3/2} \right].$$

Устремив теперь b к 0, получим

$$S = \frac{4\pi}{3} \left[\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right].$$

3.15. $y_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$.

Решение. Дуга симметрична относительно радиуса, проходящего через его середину, поэтому центр тяжести лежит на этом радиусе. Введем систему координат, как показано на рис. 114. Пусть дуга вращается вокруг оси Ox . При этом дуга опишет поверхность шарового пояса (см. пример 10, § 4), ее площадь равна $2\pi RH$, где H — высота пояса, равная в данном случае длине хорды, стяги-

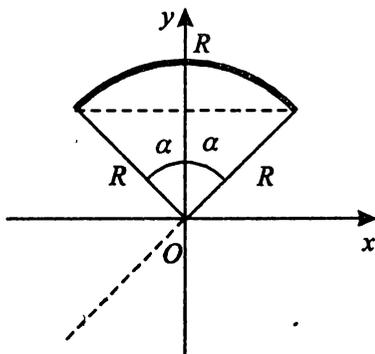


Рис. 114

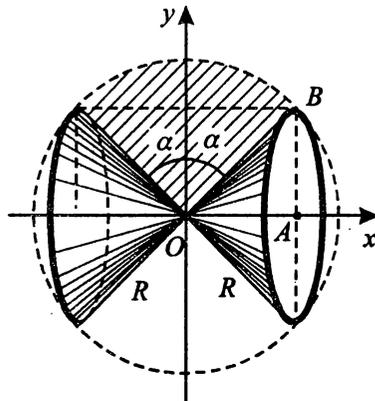


Рис. 115

вающей данную дугу; очевидно, $H = 2R \sin \alpha$. Так как длина данной дуги равна $2R\alpha$, то, обозначив ординату центра тяжести через y_C , в силу первой теоремы Гульдена, получим

$$4\pi R^2 \sin \alpha = 2\pi y_C \cdot 2R\alpha, \text{ откуда } y_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

З а м е ч а н и е. Из полученного ответа следует, что центр тяжести полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ находится в точке $(0; 2R/\pi)$.

3.16. $y_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$.

Р е ш е н и е. Введем систему координат, как показано на рис. 115.

В силу симметрии сектора относительно оси Oy , центр тяжести лежит на этой оси. Воспользуемся для решения задачи второй теоремой Гульдена. Найдем сначала объем тела, полученного в результате вращения данного сектора вокруг оси Ox . Уравнение дуги сектора $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; абсциссы ее концов, очевидно, равны $\pm R \sin \alpha$, а ординаты концов равны $R \cos \alpha$. Объем искомого тела будем искать как разность объемов шарового слоя, образованного в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной дугой $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, прямыми $x = \pm R \sin \alpha$ и осью Ox , и объемов двух одинаковых конусов, полученных при вращении концевых радиусов сектора (рис. 115)

$$V = \pi \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} (R^2 - x^2) dx - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi |AB|^2 |OA| = 2\pi \int_0^{R \sin \alpha} (R^2 - x^2) dx - \frac{2}{3} \pi R^2 \cos^2 \alpha R \sin \alpha = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{R \sin \alpha} - \frac{2\pi R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin \alpha.$$

Так как площадь данного сектора равна $R^2 \alpha$, то, обозначив ординату центра тяжести через y_C , в силу второй теоремы Гульдена, получим

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \sin \alpha = R^2 \alpha \cdot 2\pi y_C, \text{ откуда } y_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

З а м е ч а н и е. Из полученного ответа следует, что центр тяжести полукруга $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ находится в точке $(0; 4R/(3\pi))$.

3.17. а) $V = 4\pi^2$; б) $S = 8\pi^2$.

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся второй теоремой Гульдена. Площадь данного круга равна π , центр его тяжести — точка $(2; 0)$ — описывает при вращении окружность длины 4π , поэтому объем тора $V = \pi \cdot 4\pi = 4\pi^2$.

б) Воспользуемся первой теоремой Гульдена. Найдем сначала площадь S_1 поверхности, образованной вращением «правой» полуокружности $x = 2 + \sqrt{1 - y^2}$ вокруг оси Oy (рис. 116). Так как длина этой полуокружности равна π , а ее центр тяжести

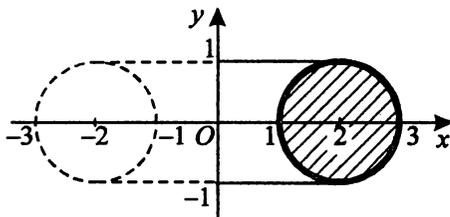


Рис. 116

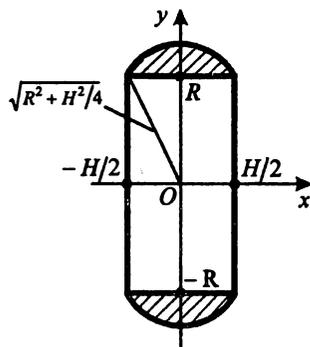


Рис. 117

— точка $(2 + 2/\pi; 0)$ ¹⁾ — описывает окружность длины $2\pi(2 + 2/\pi)$ (рис. 116), то площадь

$$S_1 = \pi \cdot 2\pi \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) = 4\pi(\pi + 1).$$

Аналогично находим площадь S_2 поверхности, образованной вращением «левой» полуокружности (ее центр тяжести — точка $(2 - 2/\pi; 0)$): $S_2 = 4\pi(\pi - 1)$. Таким образом, площадь поверхности заданного тора

$$S = S_1 + S_2 = 8\pi^2.$$

3.18. Золота добавлять не придется.

Решение. Найдем объем колечка. По формуле $V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$, где V — объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$, вокруг оси Ox , найдем искомый объем V как разность объемов тела, образованного вращением криволинейной трапеции $0 \leq y \leq \sqrt{(R^2 + H^2/4) - x^2}$, $-H/2 \leq x \leq H/2$, и цилиндра, образованного вращением прямой $y = R$ вокруг оси Ox (рис. 117). Итак,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-H/2}^{H/2} \left[\left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right) - x^2 \right] dx - \pi \int_{-H/2}^{H/2} R^2 dx = 2\pi \int_0^{H/2} \left(\frac{H^2}{4} - x^2 \right) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{H^2}{4}x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{H/2} = \frac{\pi H^3}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, объем колечка не зависит от радиуса R , а зависит только от высоты H , поэтому ювелиру не придется добавлять золота.

¹⁾ См. замечание к задаче 3.15.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Введение в математический анализ	
§ 1. Понятие множества и подмножества	5
§ 2. Наиболее употребительные числовые множества.....	7
§ 3. Абсолютная величина числа	7
§ 4. Метод математической индукции.....	11
§ 5. Факториал	13
§ 6. Соединения и формула бинома Ньютона.....	15
§ 7. Прогрессии	21
§ 8. Функция	25
§ 9. Простейшие элементарные функции. Сложная функция	31
§ 10. Построение графиков функций.....	36
§ 11. Контрольные задачи	56
Глава 2. Дифференцирование	
§ 1. Предел функции	57
§ 2. Непрерывные функции	63
§ 3. Производная функции.....	68
§ 4. Вычисление производных	76
§ 5. Исследование поведения функций и построение графиков	89
§ 6. Контрольные задачи	101
Глава 3. Интегрирование	
§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл.....	103
§ 2. Основные методы интегрирования.....	107
§ 3. Определенный интеграл	118
§ 4. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла	126
§ 5. Несобственные интегралы.....	145
§ 6. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	152
§ 7. Контрольные задачи	155
Ответы, решения к контрольным задачам	158

